www.sapientia.uji.es | 152

Cálculo II

Grados en Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Química e Ingeniería en Tecnologías Industriales

Cristina Chiralt Monleón
Alejandro Miralles Montolío



Colección «Sapientia», núm. 152

CÁLCULO II

GRADOS EN INGENIERÍA ELÉCTRICA, INGENIERÍA MECÁNICA, INGENIERÍA QUÍMICA E INGENIERÍA EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

Cristina Chiralt Monleón
Alejandro Miralles Montolío

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

■ Código de asignatura: EE1007, EM1007, EQ1007, ET1007



Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Colección Sapientia 152
www.sapientia.uji.es
Primera edición, 2019

ISBN: 978-84-17429-33-1
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152



Publicacions de la Universitat Jaume I es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización de sus publicaciones a nivel nacional e internacional. www.une.es.



Este libro, de contenido científico, ha estado evaluado por personas expertas externas a la Universitat Jaume I, mediante el método denominado revisión por iguales, doble ciego.

ÍNDICE GENERAL

La esencia de las matemáticas no es hacer las cosas simples complicadas, sino hacer las cosas complicadas simples.

-Stan Gudder-

Prólogo

Este libro va dirigido al alumnado de la asignatura *Cálculo II* que se estudia en el primer curso de los grados en Ingeniería Mecánica, Ingeniería Eléctrica, Ingeniería Química e Ingeniería en Tecnologías Industriales.

A lo largo del libro estudiaremos los métodos habituales de resolución de ecuaciones diferenciales y complementaremos este contenido mostrando diversas aplicaciones que estos métodos tienen en fenómenos reales de la física y la ingeniería.

El libro está dividido en seis temas: introducción a las ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferenciales de primer orden, ecuaciones lineales de segundo orden y de orden superior, sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, introducción a las ecuaciones en derivadas parciales y ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden lineales. Cada tema está estructurado en secciones con diversos ejemplos para poder seguir sin dificultad el libro y, al final de cada sección, hay una selección de problemas y cuestiones junto con sus soluciones. Al final de algunos temas se puede encontrar también un proyecto para profundizar en la materia.

Los autores queremos agradecer la ayuda brindada por Beatriz Campos en la elaboración de este libro.

TEMA 1

Introducción a las ecuaciones diferenciales

1.1. Introducción

Cuando tratamos de describir un sistema o fenómeno real que puede ser físico, sociológico o incluso económico, aparece el concepto de ecuación diferencial. Este término hace referencia a una ecuación en la que la incógnita es una función y en la que aparecen las derivadas de tal función. Recordemos que la derivada de una función mide la rapidez con que la función varía, es decir, mide el crecimiento de tal función. Es lógico, por tanto, que aparezcan este tipo de ecuaciones al tratar de modelizar matemáticamente muchísimos problemas que surgen de estos fenómenos.

En esta sección, introduciremos algunos ejemplos básicos para entender matemáticamente qué es una ecuación diferencial y después, veremos algunos ejemplos de estas ecuaciones en algunos fenómenos reales.

⬢ **Ejemplo 1.1.** Encuentra todas las funciones $y(x)$ que cumplan que $y' = 3x$.

Solución. Éste es un ejemplo de ecuación diferencial ya que la incógnita es una función de variable independiente x y variable dependiente y y aparece la derivada y' de tal función. En este caso, solucionar esta ecuación diferencial es sencillo. Basta con calcular una integral indefinida sencilla y obtenemos:

$$y(x) = \int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + C$$

para todo $C \in \mathbb{R}$. ■

⬢ **Ejemplo 1.2.** Encuentra una función $y(x)$ que cumpla que $y' = y$.

Solución. Si recordamos cursos anteriores de cálculo, es fácil obtener una función que cumple la propiedad de ser igual a su derivada en todos sus puntos: $y(x) = e^x$. ¿Sabrías encontrar otros ejemplos de funciones cumpliendo esta ecuación? ■

⬢ **Ejemplo 1.3.** Encuentra todas las funciones de dos variables $u(x, t)$ cumpliendo que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6xt^3.$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Solución. Basta con integrar con respecto a x para encontrar todas las soluciones de esta ecuación:

$$u(x,t) = \int 6xt^3\,dx = 3x^2t^3 + f(t)$$

donde $f(t)$ es cualquier función derivable que dependa únicamente de la variable t. ■

Veamos ahora dos ejemplos de ecuaciones diferenciales que surgen de fenómenos reales.

⬢ **Ejemplo 1.4** (**Desintegración radiactiva**). Un fenómeno cuya descripción da lugar a una ecuación diferencial muy sencilla es el de la desintegración de un elemento radiactivo. La rapidez con la que una sustancia radiactiva se desintegra es proporcional a la cantidad presente de dicha sustancia. Esto conduce a la ecuación:

$$\frac{dA}{dt} = -kA, \quad k > 0$$

donde nuestra incógnita $A(t)$ representa la cantidad de sustancia presente en un instante t y k es una constante de proporcionalidad que depende de la sustancia.

Como podremos estudiar más adelante, la solución de esta ecuación viene dada por:

$$A(t) = Ce^{-kt},$$

siendo C cualquier constante positiva. La constante C puede obtenerse si se conoce la cantidad de sustancia en un instante dado; por ejemplo, si para el instante $t = 0$ había una cantidad inicial A_0 de sustancia, entonces:

$$A_0 = Ce^{-k\,0} = C,$$

por tanto:

$$A(t) = A_0e^{-kt}.$$

Efectivamente, tener la solución de la ecuación nos permite conocer la cantidad de sustancia presente que habrá en cada instante t. ■

⬢ **Ejemplo 1.5** (**Cuerpo en caída libre**). Consideremos un cuerpo que, desde una cierta altura, cae bajo la acción de la fuerza de la gravedad, ignorando otras fuerzas de rozamiento como la debida a la resistencia del aire. En este caso, tenemos dos cantidades que van cambiando con el tiempo: su posición $h(t)$ y su velocidad $v(t)$.

Para modelizar este fenómeno, aplicamos la segunda Ley de Newton, llegando a la ecuación:

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -m\,g,$$

donde m es la masa del objeto, h es su altura sobre el suelo, d^2h/dt^2 es su aceleración, g es la constante gravitacional y $-mg$ es la fuerza debida a la gravedad.

Queremos determinar cuál es su posición en cada instante y su tipo de movimiento. Dividiendo la ecuación por m e integrando esta ecuación respecto de t obtenemos:

$$\frac{dh}{dt} = -gt + C_1$$

e integrando de nuevo:

$$h(t) = -g\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2.$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 pueden determinarse si se conocen la altura y velocidad iniciales del objeto. Supongamos que éstas son h_0 y v_0, respectivamente. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores para $t = 0$, se obtiene:

$$h(0) = h_0 = -g\frac{0^2}{2} + C_1 0 + C_2, \text{ luego } C_2 = h_0,$$

$$\frac{dh(0)}{dt} = v_0 = -g\,0 + C_1, \text{ luego } C_1 = v_0.$$

Por tanto,

$$h(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0t + h_0. \quad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 1.1

1. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y' = \cos(3x) - e^{2x}$.

   (b) $y' = x \ln x$.

   (Solución. (a) $y = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{2}e^{2x} + C$, (b) $y = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C$**)**.

2. Escribe la ecuación diferencial asociada a los siguientes fenómenos reales, escribiendo un parámetro en caso necesario:

   (a) La tasa de cambio de una población P con respecto al tiempo t es proporcional a la raíz cuadrada de P.

   (b) La aceleración de un coche es exactamente igual a la diferencia entre 30 km/h y la velocidad $v(t)$ del automóvil.

   (c) La tasa de cambio con respecto al tiempo t del número P de personas que han contraído cierta enfermedad contagiosa es proporcional al producto del número de quienes están enfermas y el número de las que no lo están en una ciudad cuya población es fija e igual a 5000 personas.

1.2. Definiciones básicas y clasificación de las ecuaciones diferenciales

De manera intuitiva, una ecuación diferencial es aquella que involucra una función junto con sus derivadas y la variable o variables de la que depende:

■ **Definición 1.1.** Una **ecuación diferencial** es una ecuación que relaciona una función desconocida (la variable dependiente), las variables de las que depende (variables independientes) y sus derivadas respecto de estas variables independientes.

En las ecuaciones diferenciales pueden aparecer ciertos términos constantes, relacionados con el problema, que reciben el nombre de **parámetros**. Las constantes k, m y g de los problemas anteriores serían ejemplos de parámetros.

Las ecuaciones diferenciales se dividen en dos grandes grupos:

- **Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**. Son aquellas en las que la función incógnita depende de una sola variable independiente, $y = y(x)$.
- **Las ecuaciones en derivadas parciales (EDP)**. Son aquellas en las que la función incógnita depende de varias variables; por tanto, relacionan la función, sus variables y las derivadas parciales de dicha función.

Notación. A lo largo de este libro, las derivadas de una función de una variable se denotarán con la notación de Leibnitz dy/dx, d^2y/dx^2, etc. o la notación prima y', y'', etc. Para las derivadas parciales, se utilizará también la notación de subíndice u_x, u_{tt}, etc.

⬢ **Ejemplo 1.6.** Indica si las siguientes ecuaciones diferenciales son EDO o EDP:

(a) $y(x)$ tal que $\dfrac{dy}{dx} + 3y = \cos x - 2$.

(b) $y(x)$ tal que $y'' = ky + 4$.

(c) $y(x)$ tal que $y^2 + 4xy - y' = 0$.

(d) $u(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

(e) $u(x, t)$ tal que $u_{xx} = 2u_{tt} - 3u_t$.

Solución. Las ecuaciones diferenciales (a), (b) y (c) son EDO mientras que las ecuaciones dadas en (d) y (e) son EDP. La EDO (b) tiene además un parámetro. ■

Las ecuaciones diferenciales también pueden clasificarse según su orden y su linealidad.

■ **Definición 1.2.** Se llama **orden** de una ecuación diferencial al mayor orden de las derivadas que aparece en la ecuación.

■ **Definición 1.3.** Una ecuación diferencial es **lineal** si se puede expresar de la forma:

$$a_n(x)y^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

donde $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x), g(x)$ dependen sólo de la variable x. En caso contrario se dice que la ecuación diferencial es **no lineal**.

■ **Nota 1.1.** La linealidad de la ecuación diferencial sólo se exige para y y sus derivadas.

Dentro de las ecuaciones diferenciales lineales distinguimos:

- Ecuaciones diferenciales lineales con **coeficientes constantes**, cuando todos los coeficientes $a_i(x)$ son constantes $\forall i = 1, \cdots, n$.
- Ecuaciones diferenciales lineales con **coeficientes variables** si algún coeficiente es una función $a_i(x)$ que depende de x y no es constante.

⬣ **Ejemplo 1.7.** Clasifica las siguientes EDO según su orden, si son lineales o no y, en caso afirmativo, indicando si son de coeficientes constantes o variables.

(a) $y'' - 3y' + y = 0$.

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} = 4e^x$.

(c) $x^3y''' - x^2y'' + 3xy' + 5y = x$.

Solución. Las ecuaciones diferenciales (a) y (b) son EDO de segundo orden lineales con coeficientes constantes. La ecuación (c) es una EDO de tercer orden lineal con coeficientes variables. ■

Si una EDO de orden n puede expresarse de manera que la derivada de orden n aparezca despejada, esta expresión recibe el nombre **forma normal** de la EDO.

■ **Nota 1.2.** Si al expresar la ecuación diferencial en forma normal aparecen cocientes, hay que tener en cuenta que las expresiones obtenidas son válidas donde éstas existan.

⬣ **Ejemplo 1.8.** Escribe en forma normal la EDO: $yy'' - 3y' = 5x$.

Solución. Despejamos la derivada más alta y obtenemos su forma normal: $yy'' - 3y' = 5x$. Por tanto, quedará: $y'' = 3\dfrac{y'}{y} + \dfrac{5x}{y}$. En este caso, $y = 0$ no es solución de la EDO dada. ■

Problemas y cuestiones de la sección 1.2

1. Clasifica las siguientes ecuaciones diferenciales, indicando si se tratan de EDO o EDP, su orden, si son lineales o no y, en caso afirmativo, indicando si son de coeficientes constantes o variables:

   (a) $yy'' - 2y' = x$.

   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y = 0$.

   (c) $u_{xx} = 3x^2 e^t u_{tx}$.

   (Solución. Las ecuaciones (a) y (b) son EDO de segundo orden no lineales. La ecuación (c) es una EDP de segundo orden lineal de coeficientes variables**).**

2. Escribe en forma normal las siguientes EDO:

   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \cos y = 0$.

   (b) $y''' + y^2 = e^x$.

   (Solución. (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\cos y$. (b) $y''' = -y^2 + e^x$**).**

3. (a) Escribe una EDO de orden 3, lineal y con coeficientes variables.
   (b) Escribe una EDP de orden 2, no lineal y con coeficientes constantes.

1.3. Soluciones de una EDO

Resolver una EDO es hallar una función $y(x)$ que satisfaga la ecuación.

■ **Definición 1.4.** Se llama **solución** de una ecuación diferencial ordinaria en un intervalo I a una función $\phi(x)$ definida en I que, sustituida en la ecuación junto con sus derivadas, verifica la ecuación en dicho intervalo.

⬣ **Ejemplo 1.9.** Comprobemos que la función $\phi(x) = e^{4x}$ es solución de la EDO de primer orden $y' = 4y$ en el intervalo $I =]-\infty, +\infty[$.

Solución. Derivando $\phi(x) = e^{4x}$ respecto de x, se obtiene $\phi'(x) = 4e^{4x}$. Sustituyendo en la ecuación, vemos que ésta se verifica para todo $x \in I$:

$$\phi'(x) = 4e^{4x} = 4\,\phi(x). \quad \blacksquare$$

⬣ **Ejemplo 1.10.** Comprobemos que la función $\phi(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ es solución de la EDO de segundo orden $y'' - \dfrac{2}{x^2}\, y = 0$.

Solución. Derivando dos veces la función $\phi(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ respecto de x, se tiene:

$$\phi'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}, \quad \phi''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}.$$

Sustituyendo en la ecuación comprobamos que sí se verifica:

$$2 - \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = 2 - \frac{2}{x^3} - 2 + \frac{2}{x^3} = 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Por tanto, $\phi(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ es solución en el intervalo $]-\infty, 0[$ y en el intervalo $]0, +\infty[$. ■

⬢ **Ejemplo 1.11.** Veamos que toda función de la forma $\phi(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 0$, para cualquier valor de las constantes C_1 y C_2.

Solución. Derivando dos veces $\phi(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$, tenemos:

$$\phi'(x) = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x},$$

$$\phi''(x) = C_1e^{-x} + 4C_2e^{2x}$$

y sustituyendo, vemos que se verifica la ecuación para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$C_1e^{-x} + 4C_2e^{2x} + C_1e^{-x} - 2C_2e^{2x} - 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{2x} = 0. \ ■$$

⬢ **Ejemplo 1.12.** La ecuación diferencial $(y')^2 + 1 = 0$ no tiene solución real ya que es imposible que la suma de esas dos cantidades sea 0.

Una solución de una EDO en la que la variable dependiente se expresa sólo en función de la variable independiente y constantes, recibe el nombre de **solución explícita**. En otras palabras, diremos que la solución es explícita si se trata de una expresión en la que la variable dependiente está "despejada" en la forma $y = y(x)$. Diremos que la solución de la EDO es una **solución implícita** si se trata de una expresión de la forma $g(x, y) = 0$, es decir, si la variable dependiente no está "despejada".

⬢ **Ejemplo 1.13.** Fijémonos en que $x^2 + y^2 = 9$ es una función implícita. Comprobemos que es una solución implícita de la EDO $y' = -\frac{x}{y}$.

Solución. Derivando la relación $x^2 + y^2 = 9$, tenemos:

$$2x + 2yy' = 0,$$

de donde se obtiene, despejando, la ecuación diferencial. ■

■ **Nota 1.3.** En el caso de obtener soluciones implícitas de la forma $g(x, y) = 0$, es necesario el uso del teorema de la función implícita para comprobar que la expresión define a y como función de x.

⬣ **Ejemplo 1.14.** Veamos que $y^2 - x^3 + 8 = 0$ es solución implícita de la ecuación diferencial $y' = \dfrac{3x^2}{2y}$ en $]2, +\infty[$.

Solución. Derivando la expresión $y^2 - x^3 + 8 = 0$ respecto de la variable x se tiene $2yy' - 3x^2 = 0$, de donde despejamos y':

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

y obtenemos el resultado deseado. En este caso, a partir de la solución implícita podemos obtener dos soluciones explícitas de la EDO: $y_1 = \sqrt{x^3 - 8}$ e $y_2 = -\sqrt{x^3 - 8}$. Observemos que estas funciones están bien definidas para todo $x \in [2, +\infty[$. ■

■ **Definición 1.5.** La gráfica de una solución de una ecuación diferencial se denomina **curva integral** de la ecuación diferencial.

Clasificación de las soluciones

Como ya hemos visto en los primeros ejemplos del capítulo, el cálculo integral trata de resolver EDO sencillas del tipo $y' = f(x)$ cuya solución viene dada por la integral indefinida $y = \int f(x)dx$ y en la que, como bien sabemos, aparece una constante arbitraria.

⬣ **Ejemplo 1.15.** Consideramos las siguientes EDO:

- La EDO de primer orden $y' = e^x$. Integrando, obtenemos la solución $y = e^x + C_1$.
- La EDO de segundo orden $y'' = e^x$. Integrando se obtiene $y' = e^x + C_1$ y volviendo a integrar se obtiene la solución $y = e^x + C_1 x + C_2$.
- Es obvio que podemos continuar este proceso y, la EDO $y^{(n)} = e^x$ tendrá una solución en la que aparecerán n constantes arbitrarias. ■

■ **Nota 1.4.** En general, una EDO que tiene solución, no tiene una sino infinitas. Además, en la mayor parte de los casos, si la EDO es de primer orden, la solución contendrá una constante arbitraria; si es de segundo orden, contendrá dos constantes arbitrarias y en general, si es de orden n, la solución contendrá n constantes arbitrarias. Al conjunto de todas esas soluciones se le llama familia $n-$paramétrica de soluciones de la EDO. ■

⬣ **Ejemplo 1.16.** La nota anterior se cumple en un amplio número de casos. Aún así, no se cumple siempre. Considera, por ejemplo, la ecuación $(y')^2 + y^2 = 0$, que tiene la única solución $y \equiv 0$ (función idénticamente nula). ■

Clasificamos las soluciones de una EDO de la forma siguiente:

- **Familia $n-$paramétrica de soluciones:** es la solución de la ecuación diferencial que contiene n constantes arbitrarias.

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \quad \longrightarrow \quad g(x, y, C_1, \cdots, C_n) = 0.$$

- **Solución particular:** es una solución de la ecuación diferencial que se obtiene dando valores numéricos a todas las constantes de la familia n-paramétrica de soluciones.
- **Solución singular:** es una solución de la ecuación diferencial que no contiene constantes arbitrarias y no está contenida en la familia n-paramétrica de soluciones. Este tipo de soluciones no existe siempre. Si lo hace, se trata de una función denominada **curva envolvente** de la familia de curvas integrales definida por la familia $n-$paramétrica de soluciones. Para profundizar en esta cuestión, consulta la sección 1.6 de este capítulo.
- **Solución general** de una ecuación diferencial ordinaria de orden n: es la que contiene todas las soluciones de la ecuación. Está formada por la familia $n-$paramétrica de soluciones más las posibles soluciones singulares que tenga la ecuación.

Resolver una ecuación diferencial consiste en hallar su solución general. En el caso de las ecuaciones diferenciales lineales no existen soluciones singulares; por tanto, la solución general coincide con la familia $n-$paramétrica de soluciones.

⬢ **Ejemplo 1.17.** Estudiemos los distintos tipos de soluciones que admite la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y}$.

Como veremos en el capítulo siguiente, la familia 1-paramétrica de soluciones de esta EDO viene dada por:

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}(x + C).$$

y éstas están definidas en el intervalo $I = [-C, +\infty[$.
Dando valores a C, obtenemos soluciones particulares. Por ejemplo, para $C = 0$ obtenemos la solución particular $\sqrt{y} = \frac{x}{2}$ que está definida en $I = [0, +\infty[$.

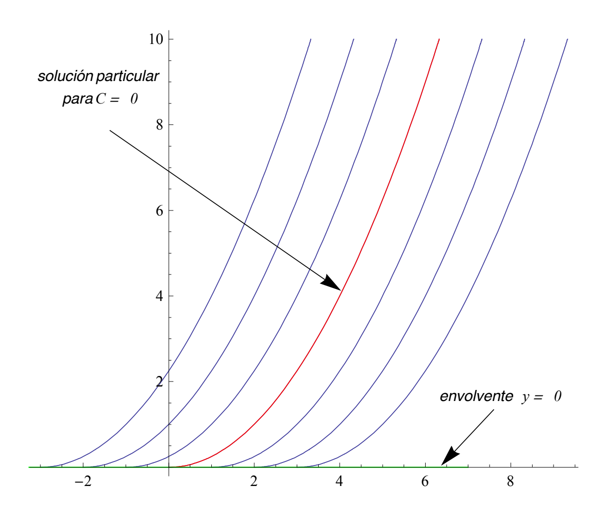


Figura 1.1: Gráficas de la familia 1-paramétrica de soluciones.

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Es obvio que la función $y = 0$ también es solución de esta EDO. Sin embargo, esta solución no pertenece a la familia 1-paramétrica que hemos obtenido, así que se trata de una solución singular de la EDO.

Por tanto, la solución general de esta EDO viene dada por:

$$\left\{\sqrt{y} = \frac{x+C}{2},\, C \in \mathbb{R}\right\} \cup \{y = 0\}. \quad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 1.3

1. Comprueba si las siguientes funciones son soluciones (explícitas o implícitas) de la EDO dada en el intervalo indicado:

   (a) La función $\phi(x) = e^{3x}$ solución de $y'' - 3y = 0$ en $I =]-\infty, +\infty[$.

   (b) La función $y = \dfrac{x^4}{16}$ solución de $y' = x\sqrt{y}$ en $I =]-\infty, +\infty[$.

   (c) La función $\phi(x) = e^x$ solución de $y' = 4y$ en $I =]-\infty, \infty[$.

   (d) La función $\phi(x) = \cos(5x)$ solución de $y'' + 25y = 0$.

   (e) La función $x + y + e^{xy} = 0$ solución de $(1 + xe^{xy})y' + 1 + ye^{xy} = 0$.

   (f) La función $x^2 - 2y^2 = 3$ solución de $x - 2yy' = 0$.

   (Solución. (a) Sí, (b) Sí, (c) No, (d) Sí, (e) Sí, (f) Sí**).**

2. Determina todos los valores de r para los que $\phi(x) = e^{rx}$ es solución de la EDO $25y'' = 36y$. **(Solución.** $r = \pm 6/5$**).**

3. (a) Determina si la relación $y - 3\ln(y+4) = x^2 + C$, es solución implícita de la EDO
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y+4)}{y+1}.$$

   (b) Comprueba que $y = -4$ es una solución de esta EDO. ¿Qué tipo de solución es?

   (c) Determina el valor de C para que la solución $y(x)$ cumpla que $y(1) = -3$.

   (Solución. (a) Sí. (b) Solución singular. (c) $C = -4$**).**

4. La expresión $y(x) = \dfrac{1}{C - 3x}$ define una familia 1-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' = 3y^2$.

   (a) ¿Hay algún valor de C para el cual la función $y(x)$ cumpla que $y(0) = 0$?

   (b) ¿Existe alguna solución $y(x)$ de la EDO para la cual $y(0) = 0$?

   (Solución. (a) No. (b) Sí, la función $y(x) = 0$**).**

5. Dada la ecuación diferencial $3(y''')^4 + y^2 = 0$,

   (a) ¿Existe alguna familia 2-paramétrica de soluciones de dicha ecuación?

   (b) ¿Tiene alguna solución?

   (Solución. (a) No. (b) Sí, la función $y(x) = 0$**).**

1.4. El problema de valor inicial

Un problema de valor inicial consiste en resolver una ecuación diferencial junto con una condición que nos indica el valor y_0 que ha de tomar la variable dependiente para un determinado valor x_0 de la variable independiente.

■ **Definición 1.6.** Un **problema de valor inicial** (o **problema de Cauchy**) para una EDO de primer orden es un problema de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

La condición adicional $y(x_0) = y_0$ recibe el nombre de **condición inicial**. Ésta nos permite calcular la constante que aparece en la familia 1-paramétrica, obteniendo la solución particular que nos interesa.

⬢ **Ejemplo 1.18.** Resolvamos el problema de valor inicial:

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

Solución. La familia 1−paramétrica de soluciones de la EDO $y' = y$ viene dada por $y = Ce^x$ en el intervalo $I =]-\infty, +\infty[$. Buscamos la solución particular cuya curva integral pasa por el punto $(0, 3)$ (ver figura 1.2).

Una vez hallada la familia $y = Ce^x$, sustituimos la condición inicial:

$$3 = Ce^0$$

obteniendo el correspondiente valor de C, que resulta ser $C = 3$. Por tanto, la solución particular buscada es $y = 3\,e^x$. ■.

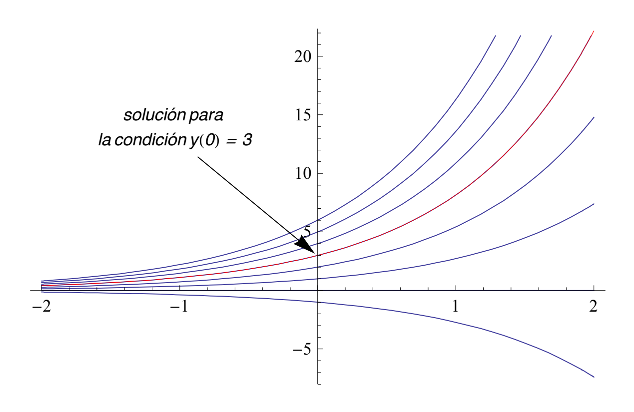


Figura 1.2: Solución del problema de valor inicial.

En general, si tenemos una ecuación diferencial de orden n, necesitaremos n condiciones de la forma $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, para poder determinar las n constantes arbitrarias de la familia $n-$paramétrica y obtener así una solución particular, donde $y^{(k)}$ denota la derivada $k-$ésima de la función y.

■ **Definición 1.7.** Un **problema de valor inicial** de una ecuación diferencial de orden n:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

consiste en encontrar una solución en un intervalo I de forma que para un cierto $x_0 \in I$ se satisfagan las condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

donde $y_0,\ y_1, \ldots\ ,\ y_{n-1}$ son valores dados.

⬣ **Ejemplo 1.19.** Demostremos que la función $\phi(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ es solución del problema de valor inicial:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

Solución. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \operatorname{sen} x - \cos x \\ \phi'(x) &= \cos x + \operatorname{sen} x \\ \phi''(x) &= -\operatorname{sen} x + \cos x, \end{aligned}$$

y sustituyendo en la EDO comprobamos que ésta se verifica:

$$-\operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} x - \cos x = 0.$$

Por tanto, $\phi(x)$ es solución de la EDO. Además:

$$\phi(0) = \operatorname{sen} 0 - \cos 0 = -1 \quad \text{y} \quad \phi'(0) = \cos 0 + \operatorname{sen} 0 = 1$$

así que también se verifican las condiciones iniciales dadas. ■

Problemas y cuestiones de la sección 1.4

1. Verifica que $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es solución del problema de valor inicial:

$$y'' - 4y = 12x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1.$$

2. Comprueba que la función $\phi(x) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4x)$ es solución del problema de valor inicial:

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

1.5. Existencia y unicidad de soluciones

Cuando consideramos un problema de valor inicial, aparecen dos cuestiones fundamentales:

- ¿Existe solución al problema?
- En caso de existir solución, ¿ésta es única?

Esto equivale a preguntarse si de toda la familia de curvas integrales existe alguna que pase por el punto definido por la condición inicial y si ésta es la única que pasa por ese punto.

⬢ **Ejemplo 1.20.** El problema de valor inicial:

$$y' - \sqrt{y} = 0, \qquad y(0) = 0,$$

tiene dos soluciones.

Solución. Este problema admite la solución particular $y = \frac{x^2}{4}$ y la solución singular $y = 0$, es decir, hay dos curvas integrales pasando por $(0, 0)$ (ver ejemplo 1.17). ■

Para asegurar la existencia y la unicidad de solución a un problema de valor inicial de primer orden, establecemos el siguiente resultado:

■ **Teorema 1.1** (Existencia y unicidad de solución)**.** Considera el problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Si f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas en un rectángulo que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior, entonces existe una única función $\phi(x)$ que es solución del problema en un intervalo I que contiene al punto x_0.

Cabe destacar que la existencia y unicidad de la solución se asegura sólo en un intervalo I, que puede ser muy pequeño, que contiene a x_0 (ver figura 1.3).

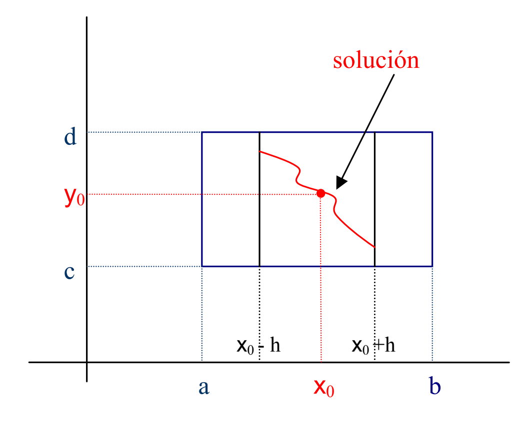


Figura 1.3: Intervalo de existencia de la solución del problema de valor inicial.

Poder asegurar la existencia y la unicidad de una solución no implica que seamos capaces de hallarla. Sin embargo, conocer este hecho nos permitirá, al menos, aproximarnos a la solución con métodos numéricos o realizar estudios cualitativos.

Ejemplo 1.21. Comprobemos que el problema del ejemplo 1.20 no satisface las condiciones del teorema anterior.

Solución. Hemos visto que la solución general de esta ecuación estaba formada por una familia 1-paramétrica de soluciones y una solución singular $y = 0$. Si dibujamos las curvas integrales, vemos que por el punto $(0, 0)$ pasan dos curvas solución, por tanto, no hay unicidad. Veamos que, efectivamente, no se verifica el teorema de existencia y unicidad para $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$y' = \sqrt{y}, \text{ es decir, } f(x, y) = \sqrt{y} = y^{1/2}, \text{ y derivando: } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en el semiplano $y > 0$, pero no son continuas en un rectángulo que contenga a $(0, 0)$.

En cambio, sí que podríamos asegurar que para todo (x_0, y_0) con $y_0 > 0$, existe un intervalo centrado en x_0 en el que el problema dado tiene solución única. ■

Ejemplo 1.22. Dado el problema de valor inicial:

$$y' = y, \quad y(0) = 3,$$

¿existe solución única?

Solución. Tenemos que $f(x, y) = y$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$, por tanto, son continuas en un rectángulo alrededor de $(0, 3)$. Podemos asegurar que existe un intervalo que contiene a $x_0 = 0$ donde existe solución y es única (de hecho, vimos que tal solución era $y = 3e^x$). ■

Problemas y cuestiones de la sección 1.5

1. Determina si se verifica el teorema de existencia y unicidad de solución en los siguientes problemas de valor inicial:

   (a) $y' = x^2 - xy^3, \quad y(1) = 6.$

   (b) $y' = x^2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$

   (c) $y' = x^2\sqrt{y}, \quad y(1) = 1.$

   (d) $y' = x^2 + y^2 - xy, \; y(0) = 2.$

   (e) $y' = \dfrac{2x}{y - 1}, \quad y(1) = 0.$

   (f) $(y')^2 + y^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 0.$

   (Solución. (a) Sí. (b) No. (c) Sí. (d) Sí. (e) Sí. (f) No**).**

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

2. Considera el problema de valor inicial:

$$y' + \sqrt{4 - y^2} = 0, \qquad y(0) = 2.$$

   (a) Demuestra que las funciones $y_1(x) = 2$ e $y_2(x) = 2\cos x$ satisfacen la EDO en el intervalo $[0, \pi]$.

   (b) Comprueba que no se cumplen las hipótesis del teorema de existencia y unicidad de solución.

1.6. Proyecto para el capítulo 1. Cálculo de la envolvente de una familia

Como ya hemos comentado en la sección 1.3, cuando una EDO tiene una solución singular, esta resulta ser la curva envolvente de la familia $n-$paramétrica de soluciones.

■ **Definición 1.8.** Se llama **envolvente** de una familia de curvas a una curva que es tangente a toda la familia y que en cada punto de la envolvente existe un único miembro de la familia tangente a ella.

⬢ **Ejemplo 1.23.** La solución singular $y = 0$ del ejemplo 1.17, es una envolvente de la familia 1-paramétrica de soluciones, ya que es tangente a todas las curvas y en cada punto de la envolvente existe un único miembro de la familia tangente a ella (ver figura 1.1).

■ **Teorema 1.2** (Condición suficiente de existencia de la envolvente)**.** Si $f(x, y, C)$ es una función dos veces diferenciable definida en un conjunto de valores x, y, C y si, para este conjunto de valores,

$$f(x, y, C) = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y, C)}{\partial C} = 0 \tag{1.1}$$

y

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial C} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial C} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial C^2} \neq 0$$

entonces, la familia de curvas $f(x, y, C) = 0$ tiene una envolvente cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por (1.1).

⬢ **Ejemplo 1.24.** Calculemos la envolvente de la familia $(x - C)^2 + y^2 = 4$.

Solución. Sea $f(x, y, C) = (x - C)^2 + y^2 - 4$. Derivando respecto de C:

$$-2(x - C) = 0 \to x - C = 0$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

y sustituyendo en la ecuación de familia de curvas:

$$0 + y^2 = 4 \to y = \pm 2,$$

obtenemos dos envolventes de esta familia de circunferencias, cuyas gráficas se muestran en la figura 1.4.

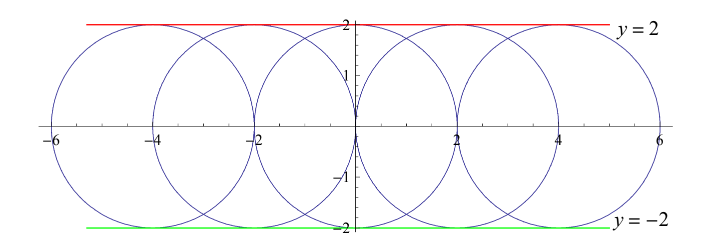


Figura 1.4: Familia 1-paramétrica de circunferencias y sus envolventes.

■

Ejemplo 1.25. Calculemos la envolvente de la familia $y = Cx^2 + 1$.

Solución. Derivando $y = Cx^2 + 1$ respecto de C tenemos $x^2 = 0$, y sustituyendo en la ecuación de la familia, se tiene que $y = 0 + 1$; por tanto, $y = 1$. Pero podemos observar que no se trata de una envolvente de la familia de curvas, sino de una de ellas, correspondiente al valor $C = 0$.

Por otra parte, si dibujamos las gráficas de esta familia de parábolas y de $y = 1$, vemos que, efectivamente, no se trata de una envolvente, pues en cada punto de ella no hay un miembro de la familia tangente a ella y además, en el punto $(0, 1)$ hay más de un miembro de la familia tangente a ella (ver figura 1.5). ■

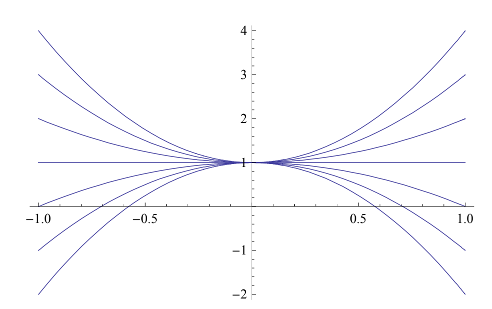


Figura 1.5: Familia 1-paramétrica de parábolas.

ISBN: 978-84-17429-33-1
Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

TEMA 2

Ecuaciones diferenciales de primer orden. Aplicaciones

2.1. Introducción

En este tema nos centraremos en la resolución de EDO de primer orden y nuestros objetivos son los siguientes:

- Distinguir si una EDO de primer orden puede resolverse por alguno de los métodos que vamos a estudiar y aplicar el método de resolución de ese método.
- Modelizar y resolver problemas provenientes de fenómenos reales donde aparecen EDO de primer orden.

Estudiaremos algunos de los métodos más habituales y también veremos la modelización y resolución de problemas reales donde surgen este tipo de ecuaciones. Entre los tipos de EDO de primer orden, estudiaremos y resolveremos ecuaciones de variables separables, ecuaciones exactas y ecuaciones que resultan ser exactas mediante el cálculo de un factor integrante, así como también ecuaciones lineales y ecuaciones homogéneas. Entre las aplicaciones, veremos cómo estas ecuaciones aparecen en la modelización de problemas de enfriamiento, problemas de mecánica newtoniana, problemas de mezclas en un depósito y en problemas del cálculo del conjunto de trayectorias ortogonales a un conjunto de curvas.

Una EDO de primer orden puede presentarse de distintas formas:

- **Forma general:** Es aquella en la que la variable independiente, la variable dependiente y sus derivadas están relacionadas e igualadas a 0. Analíticamente:
$$F(x, y, y') = 0.$$
- **Forma normal:** Tal como vimos en el capítulo 1, aquí la derivada de mayor orden está despejada:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \text{o, equivalentemente,} \quad y' = f(x, y)$$

- **Forma diferencial:** Diremos que una EDO está expresada en notación diferencial si es de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Como recordarás de cursos anteriores de cálculo, el diferencial de una función $y = f(x)$ viene dado por $dy = f'(x)dx$ e indica el incremento dy de la variable dependiente y al considerar un incremento dx de la variable x. Operando la ecuación, obtendremos:

$$N(x,y)dy = -M(x,y)dx \longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \longrightarrow y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

y llamando $f(x,y) = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, obtenemos la EDO $y' = f(x,y)$ en forma normal.

Análogamente, a partir de una EDO de la forma $y' = f(x,y)$ y utilizando la notación de Leibnitz, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \longrightarrow dy = f(x,y)dx \longrightarrow f(x,y)dx - dy = 0,$$

así que podemos pasar de la forma normal a la forma diferencial y viceversa.

Ejemplo 2.1. Escribe la EDO $3yy' = 2x + y$ en forma diferencial.

Solución. Utilizando la notación de Leibnitz, obtenemos:

$$3y\frac{dy}{dx} = 2x + y \longrightarrow 3ydy = (2x+y)dx,$$

obteniendo finalmente $(2x+y)dx - 3ydy = 0$.

Ejemplo 2.2. Escribe la EDO $(x - \cos y)dx + (x^2 - y)dy = 0$ en forma general.

Solución. Despejando, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y - x}{x^2 - y}$$

y, por tanto,

$$y' - \frac{\cos y - x}{x^2 - y} = 0.$$

Problemas y cuestiones de la sección 2.1

1. Escribe la EDO $(8x - 2y^2)y' = e^{3x}$ en forma diferencial.
2. Escribe la EDO $(x^2 - y^2)dx + (x+y)dy = 0$ en forma normal.
3. Escribe la EDO $ydx + dy = 0$ en forma general.

2.2. Ecuaciones de variables separables

■ **Definición 2.1.** Una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

es una **ecuación separable o de variables separables** si $f(x, y)$ se puede expresar como el producto de una función de x por una función de y, esto es:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y). \tag{2.1}$$

Resolución de ecuaciones de variables separables

Si la ecuación diferencial presenta la forma (2.1), separamos las variables x e y, aislándolas en miembros opuestos de la ecuación. Si $h(y) \neq 0$, obtenemos:

$$\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$$

e integrando en ambas partes de la igualdad, tendremos:

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx \tag{2.2}$$

obteniendo así la familia $1-$paramétrica de soluciones en forma implícita:

$$H(y) = G(x) + C.$$

Si $h(y) = 0$ es también solución de la EDO, la añadiremos a la familia $1-$paramétrica para obtener la solución general de la ecuación diferencial, a menos que ya esté incluida en ella.

■ **Nota 2.1.** Al calcular las integrales en (2.2), no es necesario el uso de dos constantes ya que, si escribiéramos algo del tipo $H(y) + C_1 = G(x) + C_2$, podríamos reemplazar la constante $C_2 - C_1$ por C. Normalmente, la constante suele colocarse en el término de la variable independiente (en este caso, la x).

■ **Nota 2.2.** Si la EDO se presenta en forma diferencial:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

podemos pasarla a su forma normal para comprobar si es de variables separables tal como hemos indicado antes. También podemos comprobarlo directamente. En este caso, la ecuación será de variables separables si se puede escribir de la forma:

$$g_1(x)h_1(y)\ dx + g_2(x)h_2(y)\ dy = 0. \tag{2.3}$$

En este caso, dividimos la ecuación por $h_1(y)g_2(x)$, obteniendo:

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}dx + \frac{h_2(y)}{h_1(y)}dy = 0$$

y, por tanto, la ecuación queda de la forma:

$$g(x)\;dx + h(y)\;dy = 0.$$

A continuación, separamos las variables:

$$g(x)dx = -h(y)dy$$

e integramos, obteniendo la solución implícita de la EDO al igual que en el caso anterior. ■

■ **Nota 2.3.** En el proceso de resolución se pueden perder soluciones con las manipulaciones algebraicas y, en este caso, hay que añadirlas al final para obtener la solución general. ■

⬢ **Ejemplo 2.3.** Comprueba si las siguientes ecuaciones diferenciales son o no de variables separables:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3 - x^3y^2.$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{5x - 7xy}{y^2 + 1}.$

(c) $y' = 4 + 3xy.$

(d) $\cos x\, e^y\, dx + (x^2 + 3)\, dy = 0.$

Solución.

(a) Esta ecuación la podemos reescribir como:

$$\frac{dy}{dx} = x^3\,(4 - y^2),$$

luego, sí es una ecuación de variables separables.

(b) Esta ecuación la podemos reescribir como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(5 - 7y)}{y^2 + 1};$$

por tanto, el término de la derecha se puede escribir como el producto de una función de x por una función de y:

$$\frac{dy}{dx} = x\,\frac{5 - 7y}{y^2 + 1},$$

luego, sí es una ecuación de variables separables.

(c) En la ecuación:

$$y' = 4 + 3xy$$

no podemos separar la expresión $4 + 3xy$ como producto de una función de x por una de y; por tanto, no es una ecuación de variables separables.

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

(d) Esta ecuación es de la forma:

$$\underbrace{\cos x}_{f(x)}\underbrace{e^y}_{g(y)}\,dx + \underbrace{(x^2+3)}_{h(x)}\,dy = 0,$$

luego, sí es una ecuación separable. ■

Ejemplo 2.4. Resuelve la EDO de variables separables: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+3}{y^5}$.

Solución. Separando las variables, tenemos:

$$y^5 dy = (2x+3)dx$$

e integrando ambos lados,

$$\int y^5 dy = \int (2x+3)dx$$

obtenemos la solución general implícita:

$$\frac{y^6}{6} = x^2 + 3x + C_1.$$

Si queremos despejar y para obtener soluciones explícitas, denotando $C = 6C_1$, obtenemos las soluciones:

$$y = \pm\sqrt[6]{6x^2 + 18x + C}. \quad ■$$

Ejemplo 2.5. Resuelve el problema de valor inicial dado por $y' = \dfrac{y-3}{3x+7}$ con la condición inicial $y(-2) = 1$.

Solución. Tendremos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-3}{3x+7} \longrightarrow \frac{dy}{y-3} = \frac{dx}{3x+7}. \tag{2.4}$$

Observemos que la función $y = 3$ es solución de la EDO. Si $y \neq 3$, integrando ambos miembros de (2.4), se tiene que:

$$\ln|y-3| = \frac{1}{3}\ln|3x+7| + C_1. \tag{2.5}$$

Para simplificar la expresión y eliminar los logaritmos, pasamos el $1/3$ como exponente en el logaritmo de la derecha. Después, aplicamos la función exponencial en ambos miembros y obtenemos:

$$\ln|y-3| = \ln|3x+7|^{\frac{1}{3}} + C_1 \longrightarrow e^{\ln|y-3|} = e^{\ln|3x+7|^{1/3}} e^{C_1}.$$

Como la exponencial y el logaritmo neperiano son una función inversa de la otra, obtenemos:

$$|y-3| = C|3x+7|^{1/3}$$

donde $C = e^{C_1}$ puede tomar cualquier valor real positivo. Al eliminar los valores absolutos, obtenemos la solución:

$$y - 3 = C(3x + 7)^{1/3}$$

para todo $C \neq 0$. Por último, como ya hemos comentado al principio, la función $y = 3$ que sale justamente de considerar el caso $C = 0$ también es una solución de la EDO. Por tanto, la solución general es:

$$y - 3 = C(3x + 7)^{1/3} \longrightarrow y = 3 + C\sqrt[3]{3x + 7}$$

para todo $C \in \mathbb{R}$. Para encontrar la solución particular que cumple $y(-2) = 1$, sustituimos y obtenemos $1 = 3 + C\sqrt[3]{1}$, por lo que $C = -2$ y, por tanto, la solución particular pedida será:

$$y = 3 - 2\sqrt[3]{3x + 7}. \quad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 2.2

1. Comprueba si las siguientes EDO son de variables separables o no:

   (a) $y' = 1 + x + y$

   (b) $y' = x + 1 + y + xy$

   (c) $2xydx + (3y^3 - \cos y)dy = 0$

   (**Solución.** (a) No. (b) Factorizando el término de la derecha, se observa que sí. (c) Sí**)**.

2. Obtén la solución general de las siguientes EDO de variables separables:

   (a) $3x^2\,dx - (x^3 + 1)y\,dy = 0.$

   (b) $e^{-y} \operatorname{sen} x\,dx + y \cos x\,dy = 0.$

   (c) $y' = \frac{x+xy^2}{(x^2+1)^8}.$

   (**Solución.** (a) $y^2/2 = \ln(x^3 + 1) + C$, (b) $e^y(y - 1) = \ln|\cos x| + C$, (c) $y = \tan\left(-\frac{1}{14(x^2+1)^7}\right) + C$**)**.

3. Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(4x^2 + 4)}{x}, \qquad y(1) = 1.$$

   (**Solución.** $y = x^4 e^{2x^2-1}$**)**.

2.3. Ecuaciones diferenciales exactas y factor integrante

Considera el conjunto de circunferencias centradas en el origen de coordenadas, que viene dado por la expresión:

$$x^2 + y^2 = C$$

donde $C \geq 0$. Si calculamos el diferencial en ambos lados de la igualdad, obtendremos la EDO

$$2xdx + 2ydy = 0$$

cuya solución general será, obviamente, el conjunto de funciones implícitas dado inicialmente.

¿Qué ocurre si intentamos realizar el proceso a la inversa? Es decir, consideramos, a modo de ejemplo, la EDO dada por:

$$y^3dx + 3xy^2dy = 0.$$

Nos preguntamos si esa EDO puede provenir de calcular los diferenciales de una expresión del tipo $F(x, y) = C$ como la anterior para una determinada función $F(x, y)$. En tal caso, deberá cumplirse que $\frac{\partial F}{\partial x} = y^3$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = 3xy^2$. Tras un pequeño tanteo o bien por integración, observamos que la función $F(x, y) = xy^3$ cumple estas las condiciones. Por tanto, la EDO procede de diferenciar en ambos miembros la expresión:

$$xy^3 = C$$

y, por tanto, ésta es la solución general de la ecuación.

En general, a partir de una familia de curvas de la forma $F(x, y) = C$, se puede generar una EDO de primer orden hallando el diferencial en ambos lados de la ecuación como hemos hecho en el ejemplo anterior: $dF(x, y) = 0$, es decir,

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0.$$

En esta sección trataremos de resolver ecuaciones diferenciales utilizando el proceso inverso, es decir, a partir de una EDO de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

estudiaremos si el término de la izquierda corresponde al diferencial total de alguna función de dos variables $F(x, y)$.

■ **Definición 2.2.** Una EDO de primer orden:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.6}$$

se dice que es **exacta** en una región de $\mathbb{R}^2$ (consideraremos que una región es o bien todo $\mathbb{R}^2$ o bien un rectángulo sin bordes en $\mathbb{R}^2$) si existe una función $F(x,y)$ tal que que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

en todos los puntos (x,y) de la región.

El siguiente resultado nos da una condición necesaria y suficiente para saber cuándo una EDO es exacta. Su demostración nos proporciona, además, un método para obtener la solución general $F(x,y) = C$.

■ **Teorema 2.1.** Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son dos funciones continuas con derivadas parciales continuas en una región de $\mathbb{R}^2$, entonces la EDO

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta si y sólo si se cumple:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \text{para todo } (x,y) \text{ de la región.} \tag{2.7}$$

Demostración. ($\Longrightarrow$) Si la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta, entonces existe una función $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Sabemos que, bajo las condiciones del enunciado, las derivadas cruzadas segundas de $F(x,y)$ son iguales, así que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

($\Longleftarrow$) Consideramos la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Si se cumple (2.7), veamos que existe una función $F(x,y)$ verificando las condiciones:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y).$$

Si $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$, entonces:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = G(x,y) + \varphi(y) \tag{2.8}$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

donde $G(x,y)$ es una primitiva de $M(x,y)$ respecto de x. Ahora, derivamos parcialmente respecto de y la expresión obtenida para F y la igualamos a $N(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) + \varphi'(y) = N(x,y),$$

de donde despejamos $\varphi'(y)$:

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x,y). \tag{2.9}$$

Para poder calcular $\varphi(y)$, es necesario que la expresión de la derecha sólo dependa de y y, en ese caso, podremos integrar con respecto a y y obtener $\varphi(y)$ que, sustituida en (2.8), nos dará la expresión de $F(x,y)$.

Para ver que la expresión (2.9) sólo depende de y, comprobamos que su derivada parcial con respecto de x es cero:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \blacksquare$$

Resumen para resolver EDO exactas

- Comprobamos si la EDO (2.6) es exacta.
- La solución general de la EDO viene dada por la expresión implícita:

  $$F(x,y) = C,$$

  donde $F(x,y)$ se obtiene siguiendo los pasos vistos en la demostración del teorema 2.1 y donde C es una constante arbitraria. Se puede comprobar, aplicando lo visto sobre curvas envolventes en el tema anterior, que las EDO exactas carecen de soluciones singulares.

⬢ **Ejemplo 2.6.** Resuelve la siguiente EDO:

$$(e^x + 2xy^2)dx + \left(2x^2y - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Solución. Denotando por M y N respectivamente a cada término de los diferenciales:

$$\underbrace{(e^x + 2xy^2)}_{M}dx + \underbrace{\left(2x^2y - \frac{1}{y}\right)}_{N}dy = 0,$$

se tiene que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy,$$

así que la EDO es exacta. Sabemos que la solución de la EDO vendrá dada por $F(x,y) = C$, donde F cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = e^x + 2xy^2 \tag{2.10}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = 2x^2y - \frac{1}{y}. \tag{2.11}$$

Integramos una de las dos expresiones, por ejemplo la expresión (2.10), y obtenemos:

$$F(x, y) = \int (e^x + 2xy^2)\, dx = e^x + x^2y^2 + \varphi(y)$$

donde $\varphi(y)$ es una función que sólo depende de y. Derivamos ahora con respecto a y y obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2x^2y + \varphi'(y).$$

Igualamos esta expresión y la expresión (2.11) y se tiene que:

$$2x^2y + \varphi'(y) = 2x^2y - \frac{1}{y}$$

y obtenemos que $\varphi'(y) = -\frac{1}{y}$, así que:

$$\varphi(y) = \int -\frac{1}{y} dy = -\ln|y|,$$

obteniendo que $F(x, y) = x^2y^2 - \ln|y|$. Por tanto, la solución general de la EDO en forma implícita vendrá dada por:

$$e^x + x^2y^2 - \ln|y| = C. \quad \blacksquare$$

■ **Nota 2.4.** En el cálculo de $\varphi(y)$ tomamos 0 como constante de integración, obteniendo una única primitiva. Sin embargo, no existe pérdida de soluciones en la solugión general $F(x, y) = C$ para todo C ya que si aparecen cualesquiera constantes C_1 y C_2 a la izquierda y a la derecha de la igualdad respectivamente, éstas puede pasarse a la derecha y redefinir $C = C_2 - C_1$.

⬢ **Ejemplo 2.7.** Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = \frac{e^x - y}{x + \cos y} \quad \text{con la condición inicial} \quad y(0) = 0.$$

Solución. Pasamos la EDO a notación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x + \cos y} \quad \Rightarrow \quad (y - e^x)dx + (x + \cos y)dy = 0$$

Denotando por M y N respectivamente a cada término de los diferenciales:

$$\underbrace{(y - e^x)}_{M}\, dx + \underbrace{(x + \cos y)}_{N}\, dy = 0,$$

se tiene que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

así que la EDO es exacta. Sabemos que la solución de la EDO vendrá dada por $F(x, y) = C$, donde F cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = y - e^x \tag{2.12}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = x + \cos y. \tag{2.13}$$

Integramos, por ejemplo, la ecuación (2.13), y obtenemos:

$$F(x, y) = \int (x + \cos y)\ dy = xy + \operatorname{sen} y + \psi(x)$$

donde $\psi(x)$ es una función que sólo depende de x. Derivamos ahora con respecto a x y obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + \psi'(x).$$

Igualamos esta expresión y la expresión (2.12) y se tiene que:

$$y + \psi'(x) = y - e^x$$

y obtenemos que $\psi'(x) = -e^x$, así que:

$$\psi(x) = \int -e^x dx = -e^x$$

obteniendo que $F(x, y) = xy + \operatorname{sen} y - e^x$ y, por tanto, la solución general de la EDO en forma implícita vendrá dada por:

$$xy + \operatorname{sen} y - e^x = C.$$

Para encontrar la solución particular, sustituimos la condición $y(0) = 0$ para hallar C: $0+0-e^0 = C$, obteniendo $C = -1$ y, por tanto, la solución particular será:

$$xy + \operatorname{sen} y - e^x = -1. \quad \blacksquare$$

Factores integrantes

Dada una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.14}$$

que no es exacta, a veces es posible encontrar una función $\mu(x, y)$ tal que al multiplicarla por la ecuación diferencial, ésta se convierta en exacta. Es decir,

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta.

⬢ **Ejemplo 2.8.** Considera la EDO

$$(y \cos x + 2xy^2)dx + (2 \operatorname{sen} x + 3x^2 y)dy = 0.$$

(a) Comprueba que no es exacta.

(b) Comprueba que al multiplicar la EDO anterior por la función $\mu = y$, la nueva EDO sí es exacta.

Solución. Tenemos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 4xy \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2\cos x + 6xy$$

así que la EDO no es exacta. Al multiplicar la ecuación por $\mu = y$, quedará:

$$(y^2 \cos x + 2xy^3)dx + (2y \operatorname{sen} x + 3x^2y^2)dy = 0.$$

Comprobamos si esta EDO es exacta calculando las derivadas parciales correspondientes:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2 \cos x + 2xy^3) = 2y\cos x + 6xy^2$$

y

$$\frac{\partial}{\partial x}(2y \operatorname{sen} x + 3x^2y^2) = 2y\cos x + 6xy^2$$

por lo que ambas coinciden y, por tanto, sí es exacta. ■

■ **Definición 2.3.** Diremos que una función $\mu(x, y)$ es un **factor integrante** para la EDO:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

si al multiplicar la ecuación por $\mu(x, y)$ se convierte en exacta.

■ **Nota 2.5.** Los factores integrantes pueden depender únicamente de una de las dos variables que intervienen en la EDO. Tanto la ecuación original como la nueva EDO después de multiplicar por el factor integrante, tienen esencialmente las mismas soluciones. Aún así, a veces es posible ganar o perder soluciones.

⬢ **Ejemplo 2.9.** Comprueba que $\mu(x, y) = xy^2$ es un factor integrante de la EDO:

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0 \tag{2.15}$$

y resuélvela.

Solución. Al multiplicar (2.15) por xy^2 obtenemos:

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0, \tag{2.16}$$

que se comprueba fácilmente que sí es exacta. La solución de la ecuación (2.16) será $F(x, y) = C$, siendo $F(x, y)$ una función cumpliendo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 - 6x^2y^2 \tag{2.17}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4x^3y. \tag{2.18}$$

Integrando (2.17) respecto de x se tiene que:

$$F(x, y) = \int (2xy^3 - 6x^2y^2)dx = x^2y^3 - 2x^3y^2 + \varphi(y).$$

Derivando esta expresión respecto de y, tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4x^3y + \varphi'(y).$$

Igualamos esta ecuación y la ecuación (2.18):

$$3x^2y^2 - 4x^3y + \varphi'(y) = 3x^2y^2 - 4x^3y,$$

despejamos $\varphi'(y)$:

$$\varphi'(y) = 0$$

y obtenemos una primitiva $\varphi(y) = 0$. Por tanto,

$$F(x, y) = x^2y^3 - 2x^3y^2$$

y la solución general de la ecuación diferencial (2.16) es:

$$x^2y^3 - 2x^3y^2 = C.$$

Al multiplicar la ecuación (2.15) por xy^2, se ha obtenido $y \equiv 0$ (la función idénticamente nula) como solución de (2.16). Sin embargo, ésta no es solución de la EDO original (2.15). ■

Cálculo de algunos factores integrantes

En el apartado anterior hemos visto que $\mu(x, y)$ es un factor integrante de la EDO $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ si $\mu M dx + \mu N dy = 0$ es exacta. Utilizando el teorema 2.7, tendremos que:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

y usando la regla de derivación de un producto, obtenemos:

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

es decir:

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \qquad (2.19)$$

En general, es difícil obtener μ a partir de esta ecuación. Sin embargo, en algunos casos es posible hacerlo.

- **Factor integrante de la forma** $\mu(x)$. Supongamos que queremos hallar un factor integrante que sólo dependa de x. Entonces, como la derivada con respecto a y del factor μ será igual a 0, la ecuación (2.19) quedará:

$$N\mu'(x) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(x).$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Por tanto,

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

Si la expresión de la derecha sólo depende de x y se puede integrar, entonces el factor integrante viene dado por:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}.$$

- **Factor integrante de la forma $\mu(y)$.** Análogamente al caso anterior, si buscamos un factor integrante que sólo dependa de y, como la derivada de μ con respecto a x será 0, la ecuación (2.19) quedará:

$$-M\mu'(y) = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu(y).$$

Por tanto:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{-\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M}.$$

Si la expresión de la derecha sólo depende de y y se puede integrar, entonces el factor integrante viene dado por:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M} dy}.$$

Resumen para encontrar factores que son de la forma $\mu(x)$ o $\mu(y)$

Si consideramos la EDO $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ y queremos comprobar si es exacta o reducible a exacta mediante el uso de un factor integrante, procederemos de la siguiente manera:

Primero, calculamos $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$. A continuación, tenemos dos casos:

(a) Si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación es exacta, procedemos como en el teorema 2.7 y el problema queda resuelto.

(b) Si $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación no es exacta y buscamos un factor integrante de una de las formas anteriores tanteando la expresión $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$. Si encontramos un factor integrante, se multiplica toda la EDO por dicho factor y, puesto que la ecuación obtenida es exacta, se resuelve utilizando el teorema 2.7. Finalmente, se comprueba si al multiplicar por el factor integrante aparecen soluciones extrañas o se pierden soluciones.

Ejemplo 2.10. Resuelve la EDO $(3xy - y^2)dx + x(x - y)dy = 0$.

Solución. Escribimos la ecuación desarrollando el segundo factor:

$$(3xy - y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

y observamos que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(3xy - y^2) = 3x - 2y \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy) = 2x - y,$$

así que las dos parciales son distintas y, por tanto, la EDO no es exacta. Trataremos de encontrar un factor integrante que depende únicamente de x o de y. Tanteamos la expresión $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x - y$$

y es evidente que si dividimos entre el factor $N = x(x - y)$, el resultado dependerá únicamente de x. Así,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x - y}{x(x - y)} = \frac{1}{x}$$

así que:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

es un factor integrante de la EDO. Por tanto, al multiplicar la EDO por μ, la ecuación diferencial resultante:

$$(3x^2y - xy^2)dx + (x^3 - x^2y)dy = 0.$$

sí que será exacta. Sabemos que la solución de la EDO vendrá dada por $F(x, y) = C$, donde F cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 3x^2y - xy^2 \tag{2.20}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = x^3 - x^2y. \tag{2.21}$$

Integramos, por ejemplo, la ecuación (2.21), y obtenemos:

$$F(x, y) = \int (x^3 - x^2y)\ dy = x^3y - \frac{x^2y^2}{2} + \psi(x)$$

donde $\psi(x)$ es una función que sólo depende de x. Derivamos con respecto a x y obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y - xy^2 + \psi'(x).$$

Igualamos esta expresión y la expresión (2.20) y se tiene que:

$$3x^2y - xy^2 + \psi'(x) = 3x^2y - xy^2$$

y tenemos que $\psi'(x) = 0$, así que una primitiva será $\psi(x) = 0$, obteniendo que $F(x,y) = x^3y - \frac{x^2y^2}{2}$ y, por tanto, la solución general de la EDO en forma implícita vendrá dada por:

$$x^3y - \frac{x^2y^2}{2} = C. \blacksquare$$

Ejemplo 2.11. Resuelve el problema de valor inicial dado por:

$$2xye^{x^2}dx + (4e^{x^2} + 15y)dy = 0 \quad \text{e} \quad y(0) = 1.$$

Solución. Resolvemos en primer lugar la EDO. Observemos que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xe^{x^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 8xe^{x^2}$$

así que las dos parciales son distintas y la EDO no es exacta. Para buscar un factor integrante, tanteamos la expresión:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -6xe^{x^2}$$

que al dividir por M dependerá, únicamente, de la variable y. De hecho,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{-6xe^{x^2}}{2xye^{x^2}} = -\frac{3}{y}$$

y, por tanto, un factor integrante para la EDO será:

$$\mu(y) = e^{-\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}} = e^{\int \frac{3}{y}dy} = e^{3\ln y} = e^{\ln y^3} = y^3.$$

Por tanto, la EDO original multiplicada por μ:

$$2xy^4e^{x^2}dx + (4y^3e^{x^2} + 15y^4)dy = 0$$

es una EDO exacta. Sabemos que la solución de la EDO vendrá dada por $F(x,y) = C$, donde F cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 2xy^4e^{x^2} \tag{2.22}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N = 4y^3e^{x^2} + 15y^4. \tag{2.23}$$

Integramos, por ejemplo, la ecuación (2.22), y obtenemos:

$$F(x,y) = \int 2xy^4e^{x^2}dx = y^4e^{x^2} + \varphi(y)$$

donde $\varphi(y)$ es una función que sólo depende de y. Derivamos ahora con respecto a la variable y y obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y^3e^{x^2} + \varphi'(y).$$

Igualamos esta expresión y la expresión (2.23) y se tiene que:

$$4y^3e^{x^2} + \varphi'(y) = 4y^3e^{x^2} + 15y^4$$

y obtenemos que $\varphi'(y) = 15y^4$, así que:

$$\varphi(y) = \int 15y^4 dy = 3y^5$$

obteniendo que $F(x,y) = y^4e^{x^2} + 3y^5$ y, por tanto, la solución general de la EDO en forma implícita vendrá dada por:

$$y^4e^{x^2} + 3y^5 = C.$$

Para encontrar la solución particular que cumple que $y(0) = 1$, sustituimos en la solución general, obteniendo $1e^0 + 3 \cdot 1 = C$, así que $C = 4$, obteniendo la solución particular en forma implícita:

$$y^4e^{x^2} + 3y^5 = 4. \quad \blacksquare$$

- **Factor integrante de la forma** $\mu(x,y) = x^ay^b$. Si el factor integrante es un producto de una potencia de x por una potencia de y de la forma $\mu(x,y) = x^ay^b$ con a, b números reales, podemos determinarlo de la siguiente manera:

  (1) Multiplicamos la EDO por el factor integrante:

  $$x^ay^bM(x,y)dx + x^ay^bN(x,y)dy = 0.$$

  (2) Hacemos las parciales correspondientes y las igualamos:

  $$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^ay^bM(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^ay^bN(x,y)\right)$$

  (3) Igualamos los coeficientes de los monomios de cada miembro de la igualdad y obtenemos el valor de a, b.

Ejemplo 2.12. Resuelve la EDO:

$$(12 + 5xy)dx + (6xy^{-1} + 3x^2)dy = 0$$

sabiendo que tiene un factor integrante de la forma $\mu = x^ay^b$.

Solución. Multiplicamos la EDO por μ y obtenemos:

$$x^ay^b(12 + 5xy)dx + x^ay^b(6xy^{-1} + 3x^2)dy = 0$$

y, por tanto,

$$(12x^ay^b + 5x^{a+1}y^{b+1})dx + (6x^{a+1}y^{b-1} + 3x^{a+2}y^b)dy = 0.$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Hacemos las parciales correspondientes y las igualamos:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12bx^a y^{b-1} + 5(b+1)x^{a+1}y^b$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6(a+1)x^a y^{b-1} + 3(a+2)x^{a+1}y^b$$

e, igualando los coeficientes de cada monomio, obtenemos: $12b = 6(a+1)$ y $5(b+1) = 3(a+2)$. Despejando la primera ecuación, obtenemos que $a = 2b-1$ y, sustituyendo en la otra, se tiene que $5(b+1) = 3(2b-1+2) \Rightarrow 5b+5 = 6b+3 \Rightarrow b = 2$ y, por tanto, $a = 3$. El factor integrante vendrá dado por $\mu = x^3y^2$. ■

Problemas y cuestiones de la sección 2.3

1. Indica si las siguientes EDO son exactas. En caso afirmativo, resuélvelas.
   (a) $(3x^2 + 10xy)dx + 5x^2dy = 0$.
   (b) $(1 + x^2y)dx + (1 + xy^2)dy = 0$.
   (c) $(1 + \ln x + y^2 \cos x)dx + 2y \operatorname{sen} x dy = 0$.

   (Solución. (a) Sí es exacta. La solución es $x^3 + 5x^2y = C$. (b) No es exacta. (c) Sí es exacta. La solución es $x \ln x + y^2 \operatorname{sen} x = C$**).**

2. Comprueba que las siguientes EDO no son exactas. Busca un factor integrante de la forma $\mu(x)$ o $\mu(y)$ y resuélvelas.
   (a) $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$.
   (b) $y^6 \cos x dx + (4y^5 \operatorname{sen} x + 3y^4)dy = 0$.
   (c) $(5x^2y^2 + 12y^3)dx + (2yx^3 + 12y^2x)dy = 0$.

   (Solución. (a) $\mu = x$ y la solución es $yx^3 + \frac{x^2y^2}{2} = C$. (b) $\mu = \frac{1}{y^2}$ y la solución es $y^3 + y^4 \operatorname{sen} x = C$. (c) $\mu = x^2$ y la solución es $y^2x^5 + 4x^3y^3 = C$**).**

3. Considera la EDO:

   $$x^2y^3dx + x(1 + y^2)dy = 0.$$

   (a) Comprueba que la EDO no es exacta.
   (b) Comprueba que $\mu(x, y) = \frac{1}{xy^3}$ es un factor integrante para la EDO y resuélvela.

   (Solución. (a) Las parciales son distintas. (b) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2y^2} + \ln y = C$**).**

4. Considera la EDO:

   $$(3y^3 - 12xy^4)dx + (4xy^2 - 15x^2y^3)dy = 0.$$

(a) Comprueba que la EDO no es exacta.

(b) Encuentra un factor integrante de la EDO de la forma $\mu = x^a y^b$.

(Solución. (a) Las parciales son distintas. (b) El factor integrante viene dado por $\mu = x^2 y$**)**.

5. Considera la EDO:

$$\left(\alpha x^2 y + \frac{2x}{x^2+y}\right) dx + \left(2x^3 + \frac{\beta}{x^2+y}\right) dy = 0.$$

(a) Encuentra el valor de los parámetros α y β para que la EDO sea exacta.

(b) Resuelve la EDO para esos valores de α y β.

(Solución. (a) $\alpha = 6$ y $\beta = 1$. (b) La solución es $2x^3 y + \ln(x^2+y) = C$**)**.

6. Encuentra todas las funciones $f(y)$ para que la EDO:

$$x^2 f(y) dx + \frac{x^3}{y} dy = 0$$

sea exacta.

(Solución. $f(y) = 3\ln y + C$**)**.

2.4. Ecuaciones lineales

En esta sección veremos que las EDO lineales de primer orden que fueron definidas en el primer capítulo pueden resolverse de forma sencilla ya que pueden convertirse en exactas con factor integrante.

■ **Definición 2.4.** Una **EDO lineal de primer orden** es una ecuación de la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

donde $a_1(x), a_0(x)$ y $b(x)$ son funciones que sólo dependen de x.

■ **Nota 2.6.** Si $a_1(x) \neq 0$ en un intervalo determinado, podemos dividir por $a_1(x)$ en la ecuación anterior y obtenemos una EDO de la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad (2.24)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones de x. Si pasamos esta EDO a forma diferencial, tendremos:

$$(P(x)y - Q(x))\, dx + dy = 0. \qquad (2.25)$$

Método de resolución. ¿Cómo resolvemos una EDO lineal?

- Si $P(x) \equiv 0$ la ecuación $y' = Q(x)$ se resuelve de forma inmediata mediante integración.

- En otro caso, fijémonos que las parciales de la EDO vienen dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P(x)y - Q(x)\right) = P(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}(1) = 0$$

así que, como hemos visto en la sección anterior, un factor integrante vendrá dado por la expresión:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}. \tag{2.26}$$

Una vez conocido el factor integrante, resolvemos la EDO multiplicando por el factor y resolviendo la EDO exacta correspondiente:

$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x). \tag{2.27}$$

Nota 2.7. Una forma de simplificar la resolución de estas ecuaciones consiste en la observación de que la EDO (2.27) es exacta y, por tanto, las parciales correspondientes deben ser iguales. Esto nos lleva a que $\mu(x)P(x) = \mu'(x)$, y por tanto, la ecuación quedará:

$$\mu(x)y' + \mu'(x)\, y = \mu(x)Q(x)$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x).$$

Integrando respecto de x:

$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx + C.$$

Por tanto, la solución general es:

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)Q(x)dx + C\right), \tag{2.28}$$

donde $\mu(x)$ viene dado por (2.26).

Nota 2.8. La constante C que aparece en (2.28) se debe a la integral indefinida. Remarcamos esta constante en la expresión anterior para evitar la pérdida de soluciones.

Ejemplo 2.13. Encuentra la solución general de la EDO $y' + 2xy = x$.

Solución. Es una EDO lineal y tendremos que $\mu(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$ es un factor integrante para la EDO. Por tanto, observando los pasos anteriores, tendremos que:

$$y = \frac{1}{e^{x^2}}\left(\int xe^{x^2}dx + C\right) = \frac{1}{e^{x^2}}\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + C\right) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.14. Resuelve el problema de valor inicial dado por:

$$xy' + y = x \operatorname{sen} x \;\; \text{y la condición inicial} \;\; y(\pi) = 1.$$

Solución. La EDO es lineal. La escribimos en forma canónica:

$$y' + \frac{1}{x}y = \operatorname{sen} x$$

y tendremos que $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$ es un factor integrante para la EDO. Por tanto, observando los pasos anteriores, tendremos que:

$$y = \frac{1}{x}\left(\int x \operatorname{sen} x dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(-x\cos x + \operatorname{sen} x + C\right)$$

y, por tanto, la solución general de la EDO viene dada por:

$$y = -\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x} + \frac{C}{x}.$$

Sustituyendo la condición inicial $y(\pi) = 1$, obtenemos $1 = -\cos\pi + 0 + \frac{C}{\pi}$ y, por tanto, $C = 0$ y la solución particular es:

$$y = -\cos x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}. \quad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 2.4

1. Halla la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $4y' + 6y = 0$.

   (b) $x^2y' + 2y = 0$.

   (c) $xy' + y = x^2 + 1$.

   (d) $xy' - 4y = x^5e^x$.

   (Solución. (a) $y = Ce^{-\frac{3}{2}x}$, (b) $y = Ce^{\frac{2}{x}}$, (c) $y = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$, d) $y = x^4(e^x + C)$**).**

2. Resuelve el problema de valor inicial:

$$x^2y' + 2xy = \ln x, \quad y(1) = 2.$$

   (Solución. $y = \frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$**).**

2.5. Ecuaciones homogéneas

Expresiones de dos variables de la forma x^ay^b

El grado de las expresiones de dos variables de la forma x^ay^b con $a, b \in \mathbb{R}$, viene dado por la suma de los dos exponentes: $a + b$. Por ejemplo, la expresión x^3y^4 tiene grado 7 y la expresión $\sqrt{x}y^2$ tiene grado $\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

■ **Definición 2.5.** Diremos que la combinación lineal de expresiones del tipo $x^a y^b$ es una función homogénea si cada una de las expresiones que lo forman tienen el mismo grado. Al grado común se le llama grado de homogeneidad.

⬣ **Ejemplo 2.15.** Indica si las siguientes expresiones son funciones homogéneas o no:

(1) El polinomio $f(x,y) = 2x^4 - 3x^3y + x^2y^2 - y^4$ sí que es una función homogénea cuyo grado de homogeneidad es 4.

(2) El polinomio $f(x,y) = x^2y^2 + 1$ no es una función homogénea ya que el primer término tiene grado 4 mientras que la constante 1 tiene grado 0.

(3) La función $f(x,y) = \sqrt[3]{x}y + 4\sqrt[3]{y}x$ sí que es una función homogénea ya que todos los términos tienen grado $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

Funciones de dos variables homogéneas

■ **Definición 2.6.** Diremos que una función de dos variables $f(x,y)$ es homogénea si existe un número real α tal que $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ para todos los valores de x, y en que la función esté definida y todo $t > 0$. Al número α se le denomina grado de homogeneidad de la función.

⬣ **Ejemplo 2.16.** Indica si las siguientes funciones son o no homogéneas e indica su grado de homogeneidad:

(1) La función $f(x,y) = x^3 y \cos\left(\frac{2x-y}{3x+2y}\right)$.

Tendremos que:

$$f(tx,ty) = (tx)^3 ty \cos\left(\frac{2tx - ty}{3tx + 2ty}\right) = t^4 x^3 y \cos\left(\frac{t(2x-y)}{t(3x+2y)}\right) = t^4 f(x,y)$$

así que la función es homogénea con grado de homogeneidad $\alpha = 4$.

(2) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$. Tendremos que:

$$f(tx,ty) = \arctan\left(\frac{(tx)^2 + (ty)^2}{(tx)^2 - (ty)^2}\right) = \arctan\left(\frac{t^2(x^2+y^2)}{t^2(x^2-y^2)}\right) = t^0 f(x,y)$$

así que la función es homogénea con grado de homogeneidad $\alpha = 0$.

■ **Nota 2.9.** Una combinación lineal de expresiones del tipo $x^a y^b$ que es homogénea según la definición 2.5, también es homogénea según la definición 2.6. Compruébalo con algunos ejemplos.

■ **Definición 2.7.** Una EDO de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.29}$$

se dice que es **homogénea** si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

■ **Nota 2.10.** Análogamente, se comprueba fácilmente que una EDO de la forma $y' = f(x, y)$ es homogénea si la función $f(x, y)$ es homogénea de grado 0.

⬢ **Ejemplo 2.17.** Comprueba si las siguientes ecuaciones son homogéneas:

(a) $(x^2 - 4y^2)dx + y^2 dy = 0$.

(b) $y' = \dfrac{2x + y}{x - y}$.

(c) $xdx + (3y - 1)dy = 0$.

Solución.

(a) La ecuación diferencial $(x^2 - 4y^2)dx + y^2dy = 0$ es homogénea ya que ambas funciones son homogéneas de grado 2.

(b) La ecuación diferencial $y' = \dfrac{2x + y}{x - y}$ es homogénea ya que:

$$f(tx, ty) = \frac{2tx + ty}{tx - ty} = \frac{t(2x + y)}{t(x - y)} = f(x, y),$$

así que $f(x, y)$ es homogénea de grado 0.

(c) La función x es homogénea de grado 1 pero la función $3y - 1$ no es homogénea ya que $3y$ tiene grado 1 pero -1 tiene grado 0. Por tanto, la EDO no es homogénea.

Método de resolución. Si una EDO de primer orden resulta ser homogénea, puede transformarse en una EDO de variables separables utilizando uno de los siguientes cambios de variable:

(1) **Cambio $y = ux$.** Hacemos el cambio:

$$(x, y) \to (x, u) \text{ dado por } y = ux.$$

En tal caso, tendremos $dy = udx + xdu$. Después de realizar el cambio, la EDO en la forma (2.29) puede dividirse entre x^m, donde m es el grado de homogeneidad de M y N. La ecuación se convierte en una ecuación de variables separables de variable independiente x y variable dependiente $u(x)$. Por último, deshacemos el cambio para hallar $y(x)$.

(2) **Cambio $x = vy$.** Hacemos el cambio:

$$(x, y) \to (v, y) \text{ dado por } x = vy.$$

En tal caso, tendremos $dx = vdy + ydv$ y se razona de forma análoga al caso anterior.

⬢ **Ejemplo 2.18.** Resuelve la EDO $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$.

Solución. Se trata de una ecuación homogénea, ya que M y N son polinomios homogéneos de grado 2. Por tanto, hacemos el cambio $y = ux$, con $dy = udx + xdu$, obteniendo:

$$(x^2 + x^2u^2)dx + (x^2 - xux)(udx + xdu) = 0,$$

de donde se tiene que:

$$(x^2 + x^2u^2 + x^2u - x^2u^2)dx + (x^3 - x^3u)du = 0.$$

Simplificando,

$$x^2(1 + u)dx + x^3(1 - u)du = 0$$

y como el grado de homogeneidad es 2, dividimos toda la ecuación por x^2 y quedará:

$$(1 + u)dx + x(1 - u)du = 0,$$

de donde deducimos que:

$$\frac{dx}{x} = \frac{u-1}{u+1}du \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \left(1 - \frac{2}{u+1}\right) du,$$

que es una EDO de variables separables. Integrando, obtenemos:

$$u - 2\ln|u + 1| = \ln x + C_1$$

y deshaciendo el cambio $u = y/x$, obtenemos:

$$\frac{y}{x} - 2\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| = \ln x + C_1.$$

Si queremos simplificar la expresión, aplicamos exponenciales en ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$e^{y/x}e^{\ln|y/x+1|^{-2}} = e^{\ln x}e^{C_1} \quad \Rightarrow \quad e^{y/x}|y/x + 1|^{-2} = xe^{C_1}.$$

Eliminamos el valor absoluto y cambiamos e^{C_1} por cualquier $C \neq 0$:

$$\frac{1}{(y/x+1)^2}e^{y/x} = Cx \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{(x+y)^2}e^{y/x} = Cx \quad \Rightarrow \quad xe^{y/x} = C(x + y)^2. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.19. Resuelve la EDO $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Solución. Despejando, obtenemos:

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$$

y la EDO es homogénea ya que la función $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$ es homogénea de grado 0:

$$f(tx, ty) = \frac{\sqrt{t^2x^2 - t^2y^2} + ty}{tx} = \frac{t(\sqrt{x^2 - y^2} + y)}{tx} = f(x, y) \quad \text{para todo } t > 0.$$

Hacemos el cambio $y = ux$ y nos quedará $y' = u + xu'$, así que:

$$\frac{udx + xdu}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - u^2x^2} + ux}{x} = \sqrt{1 - u^2} + u.$$

Simplificando, obtenemos:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{x}$$

e integrando,

$$\operatorname{arc\,sen} u = \ln x + C$$

de donde $u = \operatorname{sen}(\ln x + C)$ y, despejando $u = y/x$, obtenemos:

$$y = x \operatorname{sen}(\ln x + C).$$

Ejemplo 2.20. Resuelve la EDO $2x^3ydx + (x^4 + y^4)dy = 0$.

Solución. Tanteando, vemos que simplifica los cálculos el cambio $x = vy$. Tendremos que $dx = vdy + ydv$ y sustituyendo en la ecuación:

$$2v^3y^3y(vdy + ydv) + (v^4y^4 + y^4)dy = 0$$

que simplificando queda $(3v^4 + 1)y^4dy + 2v^3y^5dv = 0$. Simplificando,

$$\int \frac{-2v^3}{3v^4+1}dv = \int \frac{y^4}{y^5}dy$$

obteniendo que:

$$\frac{-1}{6}\ln(3v^4 + 1) + C_1 = \ln y.$$

Eliminando logaritmos y valores absolutos obtenemos:

$$y = C_2(3v^4 + 1)^{-1/6} \longrightarrow \frac{1}{y^6} = C_3\left(3\frac{x^4}{y^4} + 1\right) \longrightarrow 3x^4y^2 + y^6 = C \quad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 2.4

1. Indica si las siguientes funciones son o no homogéneas:

   (a) $f(x, y) = x^3y^2 - xy^4 + y^5$.

   (b) $f(x, y) = x^5 + y^5 + 3y$.

   (c) $f(x, y) = xy^2e^{\frac{x^3}{x^2y - y^3}}$.

   (Solución: (a) Sí. (b) No. (c) Sí**).**

2. Indica si las siguientes EDO son homogéneas. En caso afirmativo, resuélvelas:

   (a) $y' = \frac{x+y}{y^2}$.

   (b) $(-3x + y)dx + (x + y)dy = 0$.

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

(c) $(x^2+1)dx + y^2dy = 0$.

(d) $(x^2-y^2)dx + xydy = 0$.

(Solución: (a) No es homogénea. (b) Sí es homogénea. Si realizamos el cambio $y = ux$, obtenemos $u^2+2u-3 = Cx^{-2}$ que se simplifica y, deshaciendo el cambio, la solución general de la EDO es $y^2+2yx-3x^2 = C$ o, simplificando, $(y+3x)(y-x) = C$. (c) No es homogénea. (d) Sí es homogénea. Si realizamos el cambio $y = ux$, obtenemos $xe^{\frac{y^2}{2x^2}} = C$**)**.

3. Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$2(x+2y)dx + (y-x)dy = 0 \text{ con la condición } y(1) = 0.$$

(Solución: Haciendo el cambio $y = ux$, obtenemos $\frac{(1+u)^2}{(2+u)^3} = Cx$ que se simplifica y, deshaciendo el cambio, la solución general de la EDO es $(x+y)^2 = C(2x+y)^3$**)**.

2.6. Aplicaciones de las EDO de primer orden

Como ya hemos comentado en la introducción de este tema, vamos a ver diversas aplicaciones que tienen las EDO de primer orden.

2.6.1. Mecánica Newtoniana. Caída de cuerpos con resistencia del aire

La mecánica clásica (newtoniana) estudia el movimiento de objetos ordinarios. Sabemos desde Galileo que los cuerpos que se lanzan a la vez en ausencia de rozamiento, caen a la misma velocidad. Si lo hacen a distintas velocidades, es a causa del rozamiento debido a la resistencia del aire.

Si tiramos un objeto de masa m desde una altura determinada x_0 a una velocidad inicial v_0, para determinar su velocidad $v(t)$ en el instante t, la segunda Ley de Newton nos asegura que:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = mg - F_r,$$

donde g denota la gravedad, F_r la fuerza de rozamiento debida a la resistencia del aire y donde la aceleración del objeto, como es bien sabido, es $\frac{dv}{dt}$. Si, por ejemplo, la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad del objeto, obtendremos una ecuación de la forma:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

donde k es una constante positiva denominada coeficiente de arrastre. La condición $v(0) = v_0$ nos determinará la solución particular de nuestro problema para obtener $v(t)$. Si queremos, además, conocer la distancia recorrida por el objeto, bastará integrar $v(t)$ para obtener $x(t)$ y determinar la solución particular correspondiente utilizando $x(0) = x_0$.

⬢ **Ejemplo 2.21.** Tiramos un objeto de masa 10 kg con un impulso inicial de 3 m/s desde una altura de 1000 metros. La resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, el coeficiente de arrastre viene dado por $k = 7\ kg/s$ y la gravedad viene dada por $g = 9.8\ m/s^2$.

(a) Calcula la velocidad del objeto $v(t)$ en cualquier instante t antes de alcanzar el suelo.

(b) ¿En qué momento el objeto llega al suelo?

Solución. Tal como hemos comentado, sobre el objeto actúan dos fuerzas: una fuerza constante debida a la acción de la gravedad, dirigida verticalmente hacia abajo y de módulo $F_1 = mg$, y una fuerza correspondiente a la resistencia del aire, contraria al movimiento y proporcional a la velocidad del objeto, $F_2 = -kv(t) = -k\dfrac{dx}{dt}$, siendo $x(t)$ la distancia recorrida por el objeto en su caída en un instante t. Consideramos como eje de coordenadas un eje vertical y la posición inicial $x(0) = 0$ como aquella en la que se lanza el objeto. Tomamos como dirección positiva la que está orientada hacia abajo (ver figura 2.1).

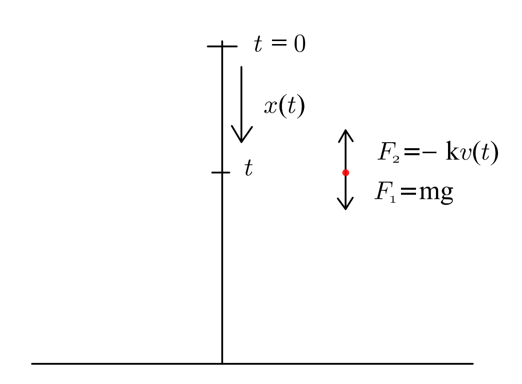


Figura 2.1: Fuerzas que actúan en la caída de un objeto.

(a) Como $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$, obtendremos:

$$10v' = 10 \cdot 9.8 - 7v$$

con la condición inicial $v(0) = 3$. Esta EDO es de variables separables y también lineal. Para resolverla como lineal, la EDO queda de la forma $v' + 0.7v = 9.8$. Tendremos que $P = 0.7$ y $Q = 9.8$, así que $\mu = e^{\int 0.7dt} = e^{0.7t}$ y, por tanto,

$$v(t) = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q dt + C\right) = e^{-0.7t}\left(\int 9.8e^{0.7t}dt + C\right) = \frac{9.8}{0.7} + Ce^{-0.7t},$$

así que $v(t) = 14 + Ce^{-0.7t}$. Como $v(0) = 3$, tendremos que $3 = 14 + Ce^0$, de donde obtenemos que $C = -11$ y, por tanto,

$$v(t) = 14 - 11e^{-0.7t}.$$

ISBN: 978-84-17429-33-1
Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

(b) Para calcular la distancia recorrida $x(t)$, integramos $v(t)$:

$$x(t) = \int v(t)dt = \int 14 - 11e^{-0.7t}dt = 14t + \frac{11}{0.7}e^{-0.7t} + C_2$$

así que $x(t) = 14t + 15.71e^{-0.7t} + C_2$ con la condición inicial $x(0) = 0$. Por tanto, $0 = 15.71 + C_2$, de donde $C_2 = -15.71$ y obtenemos que:

$$x(t) = 14t + 15.71e^{-0.7t} - 15.71.$$

Otra posibilidad para obtener directamente $x(t)$ es calcular la integral entre 0 y t (y tener en cuenta que $x(0) = 0$):

$$x(t) - x(0) = x(t) = \int_0^t v(s)ds = \int_0^t 14 - 11e^{-0.7s}ds =$$
$$\left[14s + 15.71e^{-0.7s}\right]_0^t = 14t + 15.71e^{-0.7t} - 15.71.$$

Para saber en qué momento llega el objeto al suelo, resolvemos la ecuación $x(t) = 1000$, es decir, $14t + 15.71e^{-0.7t} - 15.71 = 1000$. Una posibilidad para resolver esta ecuación sería utilizar un método numérico de aproximación de soluciones de una ecuación. Sin embargo, podemos despreciar el término $e^{-0.7t}$ si comprobamos que t tiene un valor suficientemente grande. En tal caso, quedará $14t - 15.71 = 1000$, de donde $t = 72.55\ s$. Para este valor de t, obviamente la exponencial sí es despreciable, así que tomamos ese valor aproximado como solución al problema.

⬣ **Ejemplo 2.22.** Un hombre con traje de astronauta con una masa total de 90 kg se tira en paracaídas sobre la superficie de Marte desde una altura de 2500 m. La fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista, con coeficiente de arrastre $k_1 = 10\ kg/s$ cuando el paracaídas está cerrado y $k_2 = 50\ kg/s$ cuando el paracaídas está abierto. El paracaídas se abre justo 30 s después de que se tire el hombre. ¿Cuándo llegará a la superficie el paracaidista? (Nota: La gravedad de Marte es $g = 3.71\ m/s^2$.)

Solución. El paracaidista llega al suelo con el paracaídas abierto (¡esperemos!). Por tanto, debemos averiguar a qué altura se encontrará en el momento en que se abre el paracaídas y a qué velocidad va. Para ello, estudiamos el problema en dos partes:

1. **Antes de abrir el paracaídas.** En ese caso, tenemos que $m = 90\ kg$ y $k_1 = 10\ kg/s$. Teniendo en cuenta el dato de la gravedad de Marte, la EDO que nos dará su velocidad $v_1(t)$ en este trayecto viene dada por $90v_1' = 90 \cdot 3.71 - 10v_1$, que es lineal de primer orden. Su solución general es:

$$v_1(t) = 33.39 + Ce^{-1/9t}$$

y, teniendo en cuenta que no hay impulso inicial, tendremos que $v_1(0) = 0$, así que $0 = 33.39 + C$ y, por tanto, $C = -33.39$ y obtenemos que:

$v_1(t) = 33.39 - 33.39e^{-1/9t}$. Para calcular la distancia recorrida $x_1(t)$ en este trayecto,

$$x_1(t) = x_1(t) - x_1(0) = \int_0^t v_1(s)ds = \int_0^t 33.39 - 33.39e^{-1/9s}ds =$$
$$\left[33.39s - \frac{33.39}{-1/9}e^{-1/9s}\right]_0^t = 33.39t + 300.51e^{-1/9t} - 300.51.$$

Por tanto, después de 30 s el paracaidista ha recorrido $x_1(30) = 711.91\ m$ y lleva una velocidad de $v_1(30) = 32.2\ m/s$.

2. **Después de abrir el paracaídas.** Una vez se abre el paracaídas, queremos calcular $v_2(t)$ y $x_2(t)$ pero partimos de la situación $x_2(0) = 711.91\ m$ y $v_2(0) = 32.2\ m/s$. El enunciado nos dice que $k_2 = 50\ kg/s$, así que la EDO que rige la nueva velocidad es $90v' = 90 \cdot 3.71 - 50v$ cuya solución general es $v(t) = 6.678 + Ce^{-5/9t}$. Como $v_2(0) = 32.2\ m/s$, tendremos que $32.2 = 6.678 + C$, así que $C = 25.522$ y, por tanto, $v_2(t) = 6.678 - 25.522e^{-5/9t}$. Integrando, obtenemos:

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t v_2(s)ds = 711.91 + \int_0^t 6.678 - 25.522e^{-5/9s}ds =$$
$$711.91 + \left[6.678s - \frac{25.522}{-5/9}e^{-5/9s}\right]_0^t = 6.678t + 45.94e^{-5/9t} + 665.97.$$

Para determinar cuando llegará a la superficie marciana, calculamos el instante t tal que $x_2(t) = 2500$, es decir, $6.678t + 45.94e^{-5/9t} + 665.97 = 2500$. Despreciando la exponencial, tendremos $6.678t + 665.97 = 2500$, es decir, $t = 274.64\ s$. ■

2.6.2. Problemas de mezclas en un tanque

En esta sección trabajaremos problemas de mezclas en los que una sustancia (soluto) se disuelve en otra sustancia (solvente) para obtener una mezcla homogénea en un tanque. Denotaremos por $x(t)$ a la cantidad de soluto presente en el tanque en el instante t. La EDO que modeliza la velocidad a la que el soluto $x(t)$ varía en el tanque viene dada por:

$$\frac{dx}{dt} = v_e - v_s$$

donde v_e es la velocidad de entrada del soluto y v_s es su velocidad de salida. Para calcular v_e y v_s, tendremos en cuenta que:

$$v_e = v_{e_m} \cdot c_e \quad \text{y} \quad v_s = v_{s_m} \cdot c_s$$

donde v_{e_m} denota la velocidad de entrada de la mezcla (de soluto y solvente) y c_e es la concentración de entrada del soluto con respecto a toda la mezcla. Análogamente, v_{s_m} denota la velocidad de salida de la mezcla (de soluto y

solvente) y c_s es la concentración de salida del soluto. Tengamos en cuenta que la concentración de salida en el instante t coincidirá con la concentración $c(t)$ dentro del tanque en el instante t. Es obvio que $c(t) = x(t)/vol(t)$ donde $x(t)$ es la cantidad de soluto en el instante t y $vol(t)$ es el volumen total en el tanque en el instante t.

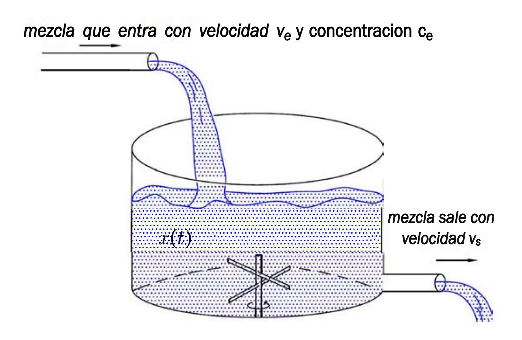


Figura 2.2: Mezcla en un tanque.

Ejemplo 2.23. Un tanque contiene inicialmente 500 l. de agua con sal. La cantidad inicial de sal es de 8 kg. En el tanque entra agua con sal a razón de 4 l/m con una concentración de sal de 0.2 kg/l. La mezcla sale al exterior a razón de 4 l/m.

(a) Calcula la cantidad de sal $x(t)$ en el depósito en cualquier instante t.

(b) ¿Cuándo la concentración de sal será de 0.1 kg/l?

Solución. En nuestro caso, el soluto es la sal y el solvente es el agua. La mezcla es la salmuera (agua con sal). Sea $x(t)$ la cantidad de sal (en kg) en el tanque en un instante t. Tendremos que el volumen en cualquier instante t dentro del tanque vendrá dado por $vol(t) = 500$ ya que cada minuto entran y salen los mismos litros de agua con sal. Por tanto, la concentración en cualquier instante t vendrá dada por $x(t)/500$. Sabemos que:

$$\frac{dx}{dt} = v_e - v_s,$$

y como $v_e = 0.2 \cdot 4 = 0.8$ y $v_s = 4 \cdot \frac{x(t)}{500}$, obtenemos:

$$x' = 0.8 - 4 \cdot \frac{x}{500} \;\Rightarrow\; x' = 0.8 - 0.008x.$$

Podemos resolver esta EDO por variables separables o como una EDO lineal. En este último caso, la EDO queda $x' + 0.008x = 0.8$, de donde $P = 0.008$ y $Q = 0.8$. Tendremos que $\mu = e^{0.008t}$ y

$$x(t) = e^{-0.008t}\left(\int 0.8e^{0.008t}dt + C\right) = 100 + Ce^{-0.008t}.$$

Para determinar C, sabemos que $x(0) = 8$, así que $8 = 100 + C$, de donde $C = -92$ y, por tanto,

$$x(t) = 100 - 92e^{-0.008t}.$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Fijémonos que si $t \to \infty$, tendremos que $x(t) \to 100$, es decir, la cantidad de sal en el tanque será exactamente el 20 % del total, tal como marca la concentración de entrada.

La concentración de sal $c(t)$ vendrá dada por:

$$c(t) = \frac{x(t)}{vol(t)} = \frac{100 - 92e^{-0.008t}}{500}$$

así que $c(t) = 0.1$ cuando:

$$\frac{100 - 92e^{-0.008t}}{500} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad 100 - 92e^{-0.008t} = 50$$

de donde obtenemos que $t = 76.22$ min. ■

⬢ **Ejemplo 2.24.** Un tanque contiene 600 litros de cerveza con un 3 % de alcohol. Se introduce en el tanque, a una velocidad de 8 l/min, cerveza que contiene un 7 % de alcohol. La mezcla, conservada homogéneamente mediante agitación, sale del tanque a una velocidad de 6 l/min.

(a) Encuentra la cantidad $x(t)$ de alcohol en el tanque en un instante t.

(b) ¿En qué instante la cerveza tendrá exactamente un 4 % de alcohol en el tanque?

Solución. (a) Ahora, el soluto será el alcohol y la mezcla total será la cerveza. Llamamos $x(t)$ a la cantidad de alcohol en el tanque en un instante t. Fijémonos que, como cada minuto entran 8 litros de cerveza y salen 10, el volumen en el instante t vendrá dado por $vol(t) = 600 + 2t$. La concentración de entrada viene dada por $c_e = 7\,\% = \frac{7}{100} = 0.07$ y la concentración de salida vendrá dada por $c_s = \frac{x(t)}{600+2t}$. Por tanto,

$$\frac{dx}{dt} = 8 \times 0.07 - 6 \times \frac{x}{600 + 2t},$$

es decir, $x' = 0.56 - \frac{6}{600+2t}x$ que podemos simplificar para obtener:

$$x' + \frac{3}{300 + t}x = 0.56$$

y con condición inicial $c(0) = 3\,\% = 0.03$. Como $c(0) = x(0)/vol(0) = x(0)/600$, obtenemos que $x(0) = 18$. Resolvemos la ecuación lineal con $P = \frac{3}{300+t}$ y $Q = 0.56$. El factor integrante resulta ser:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{3}{300+t}dt} = e^{3\ln(300+t)} = (300 + t)^3$$

y obtenemos la solución:

$$x(t) = \frac{1}{(300 + t)^3}\left(\int 0.56(300 + t)^3 dt + C\right) = (300+t)^{-3}\left(0.56\frac{(300 + t)^4}{4} + C\right)$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

de donde se tiene que $x(t) = 0.14(300 + t) + C(300 + t)^{-3}$. Como $x(0) = 18$, sustituimos y obtenemos que $18 = 42 + C \cdot 300^{-3}$, así que $C = -24 \cdot 300^3$ y, por tanto,

$$x(t) = 0.14(300 + t) - 24 \left(\frac{300}{300 + t} \right)^3 .$$

(b) Para ver cuando $c(t) = 4\,\% = 0.04$, tendremos que:

$$\frac{x(t)}{600 + 2t} = 0.04 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0.08(300 + t) \quad \Rightarrow$$

$$0.14(300 + t) - 24 \left(\frac{300}{300 + t} \right)^3 = 0.08(300 + t) \quad \Rightarrow$$

$$0.14 - 24 \frac{300^3}{(300 + t)^4} = 0.08 \quad \Rightarrow \quad t = 22.37\ min. \ \blacksquare$$

2.6.3. Trayectorias ortogonales

■ **Definición 2.8.** Dos rectas se dice que son ortogonales cuando estas son perpendiculares. Dos curvas se dice que intersectan ortogonalmente (o que son ortogonales) en un punto cuando sus respectivas rectas tangentes en ese punto son ortogonales.

■ **Nota 2.11.** Si la pendiente de una recta es m, cualquier recta perpendicular tendrá por pendiente $-1/m$.

■ **Definición 2.9.** El conjunto de trayectorias ortogonales a una familia de curvas de la forma:

$$F(x, y) = C$$

con C una constante arbitraria, viene dado por otra familia de curvas de la forma $G(x, y) = C$ de forma que todas las curvas de una familia intersectan ortogonalmente a todas las curvas de la otra familia.

El cálculo de esta familia aparece en el estudio de mapas meteorológicos, así como en el estudio de campos eléctricos y magnéticos.

Método de resolución. Consideremos la familia de curvas $F(x, y) = C$. Derivando implícitamente esta ecuación obtenemos la EDO:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

A partir de esta ecuación diferencial podemos obtener la pendiente de cada curva:

$$m = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

La pendiente para una curva que sea ortogonal es $-\frac{1}{m}$, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

Esto significa que las curvas ortogonales a la familia dada satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial F}{\partial y}dx - \frac{\partial F}{\partial x}dy = 0. \tag{2.30}$$

En resumen,

(1) **En forma diferencial.** Dada la familia $F(x, y) = C$, derivamos implícitamente y llegamos a:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Planteamos la ecuación diferencial:

$$N(x, y)dx - M(x, y)dy = 0$$

cuya solución $G(x, y) = C$ es el conjunto de trayectorias ortogonales a la familia $F(x, y) = C$.

(2) **En forma normal.** Dada la familia $F(x, y) = C$, derivamos implícitamente y llegamos a:

$$y' = f(x, y).$$

Planteamos la ecuación diferencial:

$$y' = -1/f(x, y)$$

cuya solución $G(x, y) = C$ es el conjunto de trayectorias ortogonales a la familia $F(x, y) = C$.

⬣ **Ejemplo 2.25.** Dada la familia de curvas $x^2 + y^2 = C$, calcula su familia de trayectorias ortogonales.

Solución. Veremos que la familia de trayectorias ortogonales resulta ser la familia de rectas que pasan por el origen. Al derivar $x^2 + y^2 = C$ obtenemos:

$$2xdx + 2ydy = 0.$$

Entonces, la familia de trayectorias ortogonales satisface la ecuación:

$$2ydx - 2xdy = 0.$$

Resolvemos esta ecuación de variables separables:

$$x\,dy = y\,dx,$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx,$$

integrando:

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1;$$

por tanto:

$$|y| = |x| \cdot e^{C_1},$$

es decir:

$$y = Cx, \quad C \neq 0.$$

Como $y = 0$ también es solución, la añadimos y la familia de trayectorias ortogonales es:

$$y = Cx, \quad \text{para todo } C \in \mathbb{R},$$

que representa la familia de rectas que pasan por el origen (ver Figura 2.3).

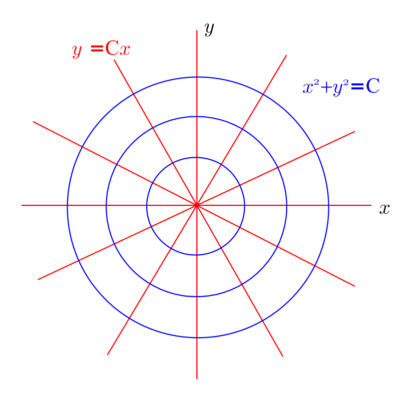


Figura 2.3: Familias de curvas ortogonales.

■

⬢ **Ejemplo 2.26.** Encuentra la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada por $y = Ce^x - x - 1$.

Solución. Aislamos la constante de la familia, reescribiendo la familia de curvas en la forma $(y + x + 1)e^{-x} = C$. Derivando obtenemos:

$$(e^{-x} - (y + x + 1)e^{-x})dx + e^{-x}dy = 0,$$

de donde operando y dividiendo la ecuación entre $e^{-x} \neq 0$, obtenemos:

$$-(y + x)dx + dy = 0.$$

Para encontrar la familia de trayectorias ortogonales, deberemos resolver la EDO $dx + (x + y)dy = 0$ o, análogamente, en forma normal, a partir de la familia $y' = x + y$, deberíamos resolver la EDO:

$$y' = -\frac{1}{x + y}.$$

Nos quedamos con la forma diferencial y comprobamos si la EDO es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

así que la EDO no es exacta pero podemos tratar de encontrar un factor integrante. De hecho,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = -1$$

Cristina Chiralt Monleón y Alejandro Miralles Montolío
ISBN: 978-84-17429-33-1
Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

así que $\mu = e^{-\int -1dy} = e^y$ es un factor integrante de la EDO. Por tanto,

$$e^y dx + (x+y)e^y dy = 0$$

es una EDO exacta y sabemos que existe $F(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^y \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = (x+y)e^y.$$

Integrando, por ejemplo, con respecto a x, obtenemos que:

$$F(x,y) = \int e^y dx = xe^y + \varphi(y)$$

de donde obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^y + \varphi'(y)$$

e igualando, obtenemos:

$$\varphi'(y) = ye^y \;\Rightarrow \varphi(y) = \int ye^y dy = (y-1)e^y$$

donde la última integral se resuelve por partes. Por tanto, $F(x,y) = xe^y + (y-1)e^y = (x+y-1)e^y$ y la solución general y, por tanto, la familia de trayectorias ortogonales vendrá dada por:

$$(x+y-1)e^y = C \;\Rightarrow x = Ce^{-y} - y + 1. \;\blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 4.4

Problemas de mecánica newtoniana

1. Tiramos un objeto de 5 kg en Marte siguiendo una trayectoria totalmente vertical desde una nave a 250 metros de altura del suelo con un impulso inicial de 1 m/s. Sabemos que la fuerza de rozamiento del aire es proporcional a la velocidad y la constante de rozamiento es $k = 10\ kg/s$. Si la gravedad de Marte es $g = 3.71\ m/s^2$, responde a las siguientes cuestiones:

   (a) ¿Cuál es su velocidad en el instante t?

   (b) ¿En qué momento el objeto lleva una velocidad de 1.5 m/s?

   (c) ¿En qué momento el objeto lleva una velocidad de 4 m/s?

   (d) ¿En qué momento llegará al suelo?

   (Solución. (a) $v(t) = 1'855 - 0'855e^{-2t}$. (b) $t = 0'44\ s$. (c) El objeto no puede sobrepasar la velocidad de $1'855\ m/s$. (d) $t = 135\ s$**).**

2. Tiramos un objeto de 6 kg. en la Luna siguiendo una trayectoria totalmente vertical desde una nave a 800 metros de altura del suelo sin impulso inicial. Sabemos que la fuerza de rozamiento del aire es proporcional al **cuadrado de la velocidad** y la constante de rozamiento es $k = 1\ kg/s$. Si suponemos que la gravedad de la Luna es $g = 1.5\ m/s^2$, calcula $v(t)$ y $x(t)$ en cualquier instante t.

   (Solución. $v(t) = 3 - \frac{6}{1+e^t}$ y $x(t) = 6\ln\left(\frac{e^t+1}{2}\right) - 3t$**).**

Problemas de mezclas en un depósito

3. Un lago tiene un volumen de 600 km^3 y en un determinado momento ($t = 0$), la concentración de contaminantes del lago es de 0.1 %. El flujo de entrada y de salida del lago se realizan, ambos, a razón de 180 km^3/año y la concentración de contaminantes en el flujo de entrada es de 0.02 %. Si el agua se mezcla perfectamente con los contaminantes en el lago, ¿Cuánto tiempo pasará para que la concentración de contaminantes se reduzca a 0.04 %?

   (Solución. Se tendrá que $x(t) = 0'12 + 0'48e^{-0'3t}$ años y $c(t) = x(t)/600 = 0.04\,\%$ cuando $t = 4'62$ años**).**

4. En un tanque muy grande con 2000 l. de agua pura entra agua con sal a razón de 14 l/m con una concentración de sal de 0.6 Kg/l. La mezcla sale al exterior a razón de 12 l/m.

   (a) Calcula la cantidad de sal $x(t)$ en el depósito en cualquier instante t.

   (b) ¿Cuándo la concentración de sal será de 0.5 kg/l.?

   (Solución. (a) $x(t) = 1'2(1000+t) - 1200\left(\frac{1000}{1000+t}\right)^6$. (b) $t = 291'71\ m$**).**

5. Un tanque contiene 1000 litros de cerveza con un 4 % de alcohol. Se introduce en el tanque, a una velocidad de 4 l/min, cerveza que contiene un 6 % de alcohol. La mezcla, conservada homogéneamente mediante agitación, sale del tanque a una velocidad de 5 l/min.

   (a) Encuentra la cantidad $x(t)$ de alcohol en el tanque en cualquier instante t.

   (b) ¿En qué instante la cerveza tendrá exactamente un 5 % de alcohol en el tanque?

   (c) ¿En qué instante se quedará el tanque vacío?

   (Solución. (a) $x(t) = 0'06(1000-t) - 20\left(\frac{1000-t}{1000}\right)^5$. (b) $t = 159'1\ m$. (c) $t = 1000\ m$**).**

Problemas de trayectorias ortogonales

6. Encuentra el conjunto de trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada por $y = C/x$.

   (Solución. $x^2 - y^2 = C$**).**

7. Encuentra el conjunto de trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada por $y = Cx^4$.

   (Solución. $x^2 + 4y^2 = C$**).**

8. Encuentra el conjunto de trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada por $x^2 - y^2 = Cx$.

   (Solución. $y(3x^2 + y^2) = C$**).**

2.7. Proyecto para el capítulo 2. Aplicaciones a problemas de enfriamiento

Ley de Newton de enfriamiento y calentamiento. De acuerdo con la Ley de Newton, la velocidad con la que la temperatura de un cuerpo varía es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea. Llamando $T(t)$ a la temperatura del cuerpo en el instante t y A a la temperatura del medio que lo rodea, tendremos que:

$$\frac{dT}{dt} = k\,(A - T),$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad que se denomina constante de transferencia de calor.

Ejemplo 2.27. Un pastel se retira del horno a una temperatura de 200 ^oC. Cinco minutos después, su temperatura es de 120 ^oC. Si la temperatura ambiente es de 24 ^oC, ¿cuál será la temperatura del pastel $T(t)$ en cualquier instante t a partir del momento en que se retira del horno? ¿Cuándo se habrá enfriado el pastel hasta alcanzar 25 ^oC?

Solución. Tendremos que $A = 24\ ^oC$. La Ley de Newton nos da que:

$$\frac{dT}{dt} = k\,(24 - T),$$

donde k está por determinar y la condición inicial es $T(0) = 200\ ^oC$. La ecuación es de variables separables y también lineal. Para resolverla como EDO lineal, tendremos:

$$T' + kT = 70k$$

así que $\mu = e^{kt}$ y, por tanto,

$$T(t) = \frac{1}{\mu}\left(\int 24k\mu + C\right) = e^{-kt}(24e^{kt} + C) = 24 + Ce^{-kt}.$$

Como $T(0) = 200$, obtenemos $24 + C = 200$ y, por tanto, $C = 176$. La otra condición del enunciado nos da que $T(5) = 120$, así que $24 + 176e^{-5k} = 120$, de donde $e^{-5k} = 96/176$ y, por tanto, $-5k = \ln(96/176)$, de donde obtenemos:

$$k = -\frac{1}{5}\ln(96/176) = 0.121227$$

así que $T(t) = 24 + 176e^{-0.121227t}$. Para saber en qué momento alcanzará una temperatura de $25\ ^oC$, resolvemos la ecuación $25 = 24+176e^{-0.121227t}$, de donde obtenemos:

$$t = \frac{\ln((25-24)/176)}{-0.121227} = 42.6513 \text{ minutos.}$$

Problemas de enfriamiento

1. La temperatura de una taza de café acabada de servir es de 100^oC. Un minuto después se ha enfriado a $90^{\circ}C$. Si la habitación está a 20^oC, ¿en qué momento la temperatura del café será de 50^oC?

   (Solución. Si expresamos el tiempo t en minutos, tendremos que $T(t) = 20 + 80e^{-0.1335t}$ y $T(t) = 50$ cuando $t = 7'35\ min$**).**

2. Se encuentra un cadáver a las $13h$ en una habitación que está a 25^oC. En ese momento, la temperatura del cadáver es de 31^oC y a las $15h$ la temperatura del cadáver es de 27^oC. Teniendo en cuenta que la persona tenía una temperatura de 37^oC cuando falleció, ¿a qué hora murió?

   (Solución. Si expresamos el tiempo t en horas, tendremos que $T(t) = 25 + 6e^{-0.5493t}$ y $T(t) = 50$ cuando $t = -2.6\ h$, es decir, murió sobre las 10:24**).**

TEMA 3

Ecuaciones lineales de segundo orden y de orden superior

Las EDO lineales de orden dos o, en general, de cualquier orden, surgen al modelizar muchos problemas de ingeniería: muelles elásticos, caída de cuerpos, flujo de corrientes eléctricas, etc. También resultan de gran utilidad para aproximar soluciones de ecuaciones no lineales.

Los objetivos de este tema serán:

- Ecuaciones lineales de orden $n \geq 2$ homogéneas.
- Ecuaciones lineales no homogéneas y soluciones particulares por el método de coeficientes indeterminados y por variación de parámetros.
- Aplicaciones de las ecuaciones lineales de orden 2.
- Transformada de Laplace y sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales.

3.1. Introducción

Para introducir EDO lineales de orden dos, consideremos un péndulo simple que consta de una masa m suspendida por un cable de longitud l y masa despreciable, de modo que el cable se mantiene siempre recto y la masa queda libre oscilando en un plano vertical.

La modelización del movimiento del péndulo nos lleva a una ecuación de segundo orden que no es lineal:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\alpha = 0.$$

y cuya solución explícita resulta muy difícil de encontrar. Sin embargo, como $\operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$, podemos aproximar esa ecuación con la EDO lineal de segundo orden dada por:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0, \tag{3.1}$$

donde el ángulo que forma el cable con la vertical en cada instante t viene dado por la función $\alpha(t)$ (ver figura 3.1).

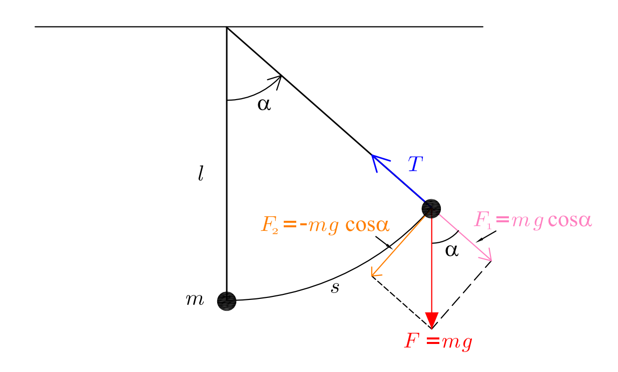


Figura 3.1: Fuerzas que intervienen en el péndulo simple.

Para oscilaciones pequeñas del péndulo, las soluciones determinadas a partir de (3.1) serán una buena aproximación de las soluciones reales.

Veamos que las funciones $\alpha(t) = \cos(\omega t)$ y $\alpha(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$ son soluciones de la EDO para una constante ω adecuada. Sustituyendo $\alpha(t) = \cos(\omega t)$ en (3.1) tenemos:

$$-\omega^2 \cos(\omega t) + \frac{g}{l}\cos(\omega t) = 0, \text{ es decir, } \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right)\cos(\omega t) = 0.$$

Escogiendo $\omega^2 = \frac{g}{l}$, tendremos que $\alpha_1(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$ es una solución de (3.1). Análogamente, $\alpha_2(t) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$ es también solución de (3.1). Dado que (3.1) es una ecuación lineal, es fácil ver que cualquier combinación de la forma:

$$\alpha(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \tag{3.2}$$

también es solución de la EDO, con C_1 y C_2 constantes arbitrarias. Como veremos en el teorema 3.3, toda solución de la ecuación (3.1) será de la forma (3.2).

Conociendo el desplazamiento inicial $\alpha(0)$ y la velocidad angular inicial $\alpha'(0)$ es posible determinar el valor de las constantes C_1 y C_2. Obtenemos así las soluciones particulares que describen el movimiento para cada par de condiciones iniciales.

■ **Nota 3.1.** Como el periodo de $\cos(\omega t)$ y $\operatorname{sen}(\omega t)$ es $\frac{2\pi}{\omega}$, entonces el periodo de oscilación del péndulo vendrá dado por:

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

El movimiento descrito en la ecuación (3.2) se denomina **movimiento armónico simple**. ■

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

3.2. Ecuaciones lineales de segundo orden

Una **EDO lineal de orden 2**, tal como vimos en el tema 1, vendrá dada por una expresión del tipo:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \tag{3.3}$$

donde los coeficientes $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ y $b(x)$ son funciones que pueden ser constantes o variables.

Recordemos también que si $b(x) \equiv 0$, se dice que la ecuación es **homogénea** y si $b(x) \neq 0$, diremos que la ecuación es **no homogénea** y el término $b(x)$ se denomina **término no homogéneo** o **término independiente**.

Estudiaremos estas ecuaciones en un intervalo donde los coeficientes sean funciones continuas. Suponiendo además que $a_2(x) \neq 0$ en dicho intervalo, dividiendo por $a_2(x)$ podemos expresar la ecuación (3.3) en su forma canónica:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{3.4}$$

con $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ contínuas. Bajo estas condiciones, un problema de valor inicial para esta EDO tiene solución y, además, es única:

■ **Teorema 3.1.** Sean $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ funciones continuas en algún intervalo $]a, b[$ que contiene al punto x_0. Entonces, para cualquier elección de los valores y_0, y_1 existe una única solución del problema de valor inicial:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad \text{sujeto a } y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1.$$

⬢ **Ejemplo 3.1.** Determina el mayor intervalo para el cual podemos asegurar que existe una única solución del problema de valor inicial siguiente:

$$y'' + \frac{4}{x-5}\, y' + \sqrt{x}\, y = \ln x, \qquad \begin{aligned} y(2) &= 3 \\ y'(1) &= -5. \end{aligned}$$

Solución. La función $p(x) = \dfrac{4}{x-5}$ es continua en $\mathbb{R} - \{5\}$, $q(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, +\infty[$ y $g(x) = \ln x$ es continua en $]0, +\infty[$. Por tanto, el mayor intervalo abierto que contiene a $x_0 = 2$ y donde las tres funciones son continuas a la vez es $]0, 5[$. ■

3.2.1. Ecuaciones lineales homogéneas

■ **Definición 3.1.** La ecuación (3.4) dada por:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

tiene asociada su **ecuación homogénea** dada por:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.5}$$

■ **Teorema 3.2.** Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de la EDO lineal homogénea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.6}$$

entonces cualquier combinación lineal $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, con C_1, C_2 constantes arbitrarias, también es solución de la ecuación.

Demostración. Como y_1 e y_2 son soluciones de (3.6), tendremos que:

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0, \tag{3.7}$$
$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0. \tag{3.8}$$

Obviamente, $C_1y_1 + C_2y_2$ también es solución ya que:

$$\begin{aligned}(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y_1 + C_2y_2)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) &= \\ (C_1y_1'' + C_2y_2'') + p(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) &= \\ C_1\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right) + C_2\left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right) &= \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ejemplo 3.2. Sabiendo que $y_1(x) = e^{2x}\cos(3x)$ e $y_2(x) = e^{2x}\operatorname{sen}(3x)$ son soluciones de la EDO $y'' - 4y' + 13y = 0$, halla una solución de la EDO que cumpla las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$.

Solución. Tendremos que $y(x) = C_1e^{2x}\cos(3x) + C_2e^{2x}\operatorname{sen}(3x)$, también es solución de dicha ecuación. Buscaremos C_1 y C_2 adecuadas para que se verifiquen las condiciones iniciales dadas. Para ello, calculamos $y'(x)$:

$$y'(x) = C_1(2e^{2x}\cos(3x) - 3e^{2x}\operatorname{sen}(3x)) + C_2(2e^{2x}\operatorname{sen}(3x) + 3e^{2x}\cos(3x))$$

y sustituimos las condiciones dadas:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 2 \\ y'(0) &= 2C_1 + 3C_2 = -5 \to C_2 = -3. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del problema de valor inicial es:

$$y(x) = 2e^{2x}\cos(3x) - 3e^{2x}\operatorname{sen}(3x). \ \blacksquare$$

Ejemplo 3.3. Si consideramos la ecuación homogénea:

$$y'' - y = 0, \tag{3.9}$$

las funciones $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-x}$ son dos soluciones de esta EDO. Por el teorema anterior, sabemos que toda combinación lineal de la forma $C_1e^x + C_2e^{-x}$ también es solución. Veamos que todas las soluciones son de esta forma. Para ello, consideramos $\phi(x)$ una solución cualquiera de (3.9) y tomamos un valor fijo $x_0 \in \mathbb{R}$. Si existen C_1 y C_2 constantes que cumplan:

$$\left\{\begin{array}{rcl} C_1e^{x_0} + C_2e^{-x_0} &=& \phi(x_0), \\ C_1e^{x_0} - C_2e^{-x_0} &=& \phi'(x_0), \end{array}\right. \tag{3.10}$$

tendremos que las dos soluciones $\phi(x)$ y $C_1e^x + C_2e^{-x}$ satisfacen ambas las mismas condiciones iniciales en x_0. El Teorema 3.1 nos asegura que la solución de la EDO existe y es única, así que necesariamente:

$$\phi(x) = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, cualquier solución de la EDO está incluida en esta combinación lineal.

Para que existan C_1 y C_2 verificando el sistema (3.10), éste tiene que ser un sistema compatible determinado y, por el teorema de Rouché-Frobenius, sabemos que la condición que debe cumplirse es:

$$\begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{vmatrix} \neq 0. \quad \blacksquare$$

En el ejemplo anterior, hemos visto que todas las soluciones de la EDO se podían expresar como combinación lineal de dos soluciones particulares y_1 e y_2. En general, esta propiedad se cumple para EDO lineales de segundo orden si y_1 e y_2 satisfacen la condición del determinante que hemos visto, tal como vemos en el siguiente teorema:

■ **Teorema 3.3.** Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones en un intervalo $]a, b[$ de la EDO:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.11}$$

con $p(x)$ y $q(x)$ funciones contínuas en $]a, b[$. Si en algún punto x_0 de $]a, b[$ se satisface:

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.12}$$

entonces, todas las soluciones de (3.11) se expresan de la forma:

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \tag{3.13}$$

con C_1 y C_2 constantes.

La combinación lineal dada por (3.13) es la **solución general** de la EDO (3.11).

■ **Definición 3.2.** Decimos que $\{y_1(x),\, y_2(x)\}$ es un **conjunto o sistema fundamental de soluciones** de (3.11) si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones verificando el teorema anterior.

■ **Definición 3.3.** Dadas dos funciones derivables $y_1(x)$ e $y_2(x)$, se denomina **wronskiano** de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ a la expresión dada por:

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Por el teorema 3.3, una pareja de soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la EDO lineal (3.11) en un intervalo $]a, b[$ es un conjunto fundamental de soluciones si se cumple que $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$, para algún $x_0 \in]a, b[$.

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Ejemplo 3.4. Las funciones $y_1(x) = \cos(3x)$ e $y_2(x) = \operatorname{sen}(3x)$ son soluciones de la EDO $y'' + 9y = 0$ en el intervalo $]-\infty, +\infty[$. Calcula la solución general de dicha EDO.

Solución. Calculamos su wronskiano:

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} \cos(3x) & \operatorname{sen}(3x) \\ -3\operatorname{sen}(3x) & 3\cos(3x) \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

así que $\{\operatorname{sen}(3x), \cos(3x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones y la solución general de la EDO es:

$$y(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x). \blacksquare$$

El siguiente resultado muestra que el wronskiano de dos funciones que sean soluciones de una EDO lineal de segundo orden debe anularse en todos los puntos o en ninguno:

Teorema 3.4. Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de la EDO lineal:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en el intervalo $]a, b[$, entonces su wronskiano, $W[y_1, y_2](x)$ o bien es idénticamente nulo o bien no se anula en ningún punto de $]a, b[$.

Definición 3.4. Dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ se dice que son **linealmente dependientes** en un intervalo $]a, b[$ si existen un par de constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ que no se anulan simultáneamente, tales que:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, \quad \forall x \in (a, b).$$

Diremos que las funciones y_1 e y_2 son **linealmente independientes** en $]a, b[$ si no son linealmente dependientes, es decir, si para cualquier par de constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, existe algún $x_0 \in]a, b[$ donde se verifica:

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) \neq 0.$$

Teorema 3.5. Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de la EDO lineal:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

en el intervalo $]a, b[$, entonces son equivalentes:

a) $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ para todo $x \in]a, b[$.

b) $W[y_1, y_2](x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in]a, b[$, es decir, $\{y_1(x), y_2(x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la EDO.

c) $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes.

Por tanto, para comprobar si dos soluciones forman un sistema fundamental de soluciones, bastará con comprobar si el wronskiano es nulo o no. Esto es, además, equivalente a que las dos soluciones sean linealmente independientes.

⬢ **Ejemplo 3.5.** Determina si las funciones $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = e^{-2x}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución. Calculamos el wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-x} - e^{-x} = -3e^{-x} \neq 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

así que, por el resultado anterior, sabemos que las dos soluciones son linealmente independientes. ■

Cálculo de un sistema fundamental de soluciones para EDO homogéneas con coeficientes constantes

Veamos como calcular un sistema fundamental de soluciones de una EDO de segundo orden homogénea con coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{3.14}$$

El teorema 3.1 garantiza que (3.14) tiene soluciones definidas en todo el conjunto $\mathbb{R}$ ya que las constantes son funciones contínuas en $\mathbb{R}$. Para buscar un conjunto fundamental de soluciones y obtener la solución general de la EDO, consideraremos funciones de la forma $y(x) = e^{rx}$, siendo r una constante a determinar. Para averiguar el valor de r, derivamos:

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

y sustituyendo en (3.14) obtenemos:

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \longrightarrow \left(ar^2 + br + c\right) e^{rx} = 0.$$

Como $e^{rx} \neq 0$ para cualquier valor de r y de x, obtenemos:

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{3.15}$$

Por tanto, e^{rx} será solución de (3.15) si r satisface la ecuación (3.15).

■ **Definición 3.5.** La ecuación (3.15) se denomina **ecuación característica** (o **auxiliar**) de la EDO (3.14). El polinomio $p(r) = ar^2 + br + c$ se llama **polinomio característico** de la EDO.

Las raíces del polinomio característico son:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y, dependiendo de los valores de estas raíces, construimos el sistema fundamental de soluciones de la siguiente manera:

1. **Raíces reales y distintas**

   Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas, un sistema fundamental de soluciones de (3.14) viene dado por:

   $$\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$$

   y la solución general de la EDO (3.14) viene dada por:

   $$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

   Veamos que las soluciones son linealmente independientes:

   $$W\left[e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\right] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{r_1 x} e^{r_2 x}(r_2 - r_1) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   ⬢ **Ejemplo 3.6.** Encuentra la solución general de la EDO $y'' - 6y' + 8y = 0$.

   Solución. La ecuación característica asociada a esta ecuación es $r^2 - 6r + 8 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 2$ y $r_2 = 4$. Por tanto, el sistema fundamental de soluciones es:

   $$\{e^{2x},\ e^{4x}\}$$

   y la solución general es:

   $$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}. \quad \blacksquare$$

2. **Raíces reales repetidas**

   Si $r_1 = r_2 = r$ son raíces reales repetidas, un sistema fundamental de soluciones de (3.14) viene dado por:

   $$\{e^{rx},\quad xe^{rx}\}$$

   y la solución general de la EDO (3.14) viene dada por:

   $$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}.$$

   La solución re^{rx} se puede obtener mediante el denominado método de reducción del orden, que puede estudiarse en el anexo 3.7.1. Comprobamos que las soluciones e^{rx} y xe^{rx} son linealmente independientes:

   $$W\left[e^{rx}, xe^{rx}\right] = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx}(1 + rx) \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

⬢ **Ejemplo 3.7.** Resuelve la EDO $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Solución. La ecuación característica asociada a esta ecuación es $r^2+6r+9=0$, cuya solución es $r=-3$ con orden de multiplicidad 2. Por tanto, el sistema fundamental de soluciones es:

$$\{e^{-3x},\ x\,e^{-3x}\}$$

y la solución general es:

$$y(x)=C_1e^{-3x}+C_2\,x\,e^{-3x}.\ \blacksquare$$

3. **Raíces complejas conjugadas**

   Si un polinomio de segundo grado con coeficientes reales tiene raíces complejas, entonces las raíces son necesariamente complejas conjugadas, es decir, son de la forma $r_1=\alpha+i\beta$ y $r_2=\alpha-i\beta$. Si la ecuación característica tiene dos soluciones de esta forma, un sistema fundamental de soluciones vendrá dado por:

   $$\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\}$$

   y la solución general de la EDO (3.14) viene dada por:

   $$y(x)=C_1e^{\alpha x}\cos(\beta x)+C_2e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x).$$

Nota 3.2. Para razonar por qué las soluciones anteriores son un conjunto fundamental de soluciones, es necesario trabajar con exponenciales complejas. Para profundizar en esto, ver el anexo 3.7.2.

Ejemplo 3.8. Resuelve la EDO $y''+2y'+5y=0$.

Solución. La ecuación característica asociada a esta ecuación es $r^2+2r+5=0$, cuyas raíces son $r_1=-1+2i$ y $r_2=-1-2i$. Por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{e^{-x}\cos(2x),\ e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\}$$

y la solución general es:

$$y(x)=C_1e^{-x}\cos(2x)+C_2e^{-x}\operatorname{sen}(2x).\ \blacksquare$$

Nota 3.3. Hemos visto como calcular la solución general de una EDO lineal homogénea de orden dos con coeficientes constantes. Otras EDO cuyos coeficientes son variables también pueden resolverse. Por ejemplo, las denominadas ecuaciones de Cauchy-Euler, que son de la forma:

$$ax^2y''+bxy'+cy=0$$

donde a,b,c son constantes. Estas EDO pueden estudiarse en la sección 3.6.

Problemas y cuestiones de la sección 3.2.1

1. Demuestra que las funciones e^{4x} y e^{5x} son linealmente independientes.
2. Demuestra que las funciones e^x y xe^x son linealmente independientes.
3. Demuestra las funciones $e^x \operatorname{sen} x$ y $e^x \cos x$ son linealmente independientes.
4. Encuentra una EDO cuyo conjunto fundamental de soluciones sea $\{e^{4x}, xe^{4x}\}$.
   (Solución. $y'' - 8y' + 16y = 0$**).**
5. Resuelve las siguientes EDO:
   (a) $3y'' + 6y' - 9y = 0$.
   (b) $9y'' - 12y' + 4y = 0$.
   (c) $y'' + 2y' + 2y = 0$.
   (d) $y'' + 5y = 0$.
   (Solución. (a) $y(x) = C_1 e^x + C_2\ \mathrm{e}^{-3x}$,
   (b) $y(x) = C_1 e^{2x/3} + C_2\, x\, e^{2x/3}$,
   (c) $y(x) = C_1 e^{-x} \cos x + C_2 e^{-x} \operatorname{sen} x$,
   (d) $y(x) = C_1 \cos(\sqrt{5}x) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{5}x)$**).**
6. Encuentra la solución particular del problema $y'' - 2y' + y = 0$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
   (Solución. $y(x) = e^x$**).**

3.2.2. Ecuaciones lineales no homogéneas

En esta sección consideraremos las EDO del tipo:

$$y'' + p(x)y' + q(x) = g(x),$$

es decir, EDO lineales de segundo orden no homogéneas.

■ **Teorema 3.6 (Principio de superposición).** Si $y_1(x)$ es una solución de la EDO:

$$y'' + p(x)y' + q(x) = g_1(x)$$

e $y_2(x)$ es una solución de la EDO:

$$y'' + p(x)y' + q(x) = g_2(x),$$

entonces cualquier combinación lineal de la forma:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

para $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ es solución de la EDO:

$$y'' + p(x)y' + q(x) = C_1 g_1(x) + C_2 g_2(x).$$

La prueba de este teorema es sencilla y la dejamos como ejercicio para el lector.

Ejemplo 3.9. Sabiendo que la función $y_1(x) = -\frac{x}{3} - \frac{2}{9}$ es solución de la EDO:

$$y'' + 2y' - 3y = x$$

y que la función $y_2(x) = \frac{e^{2x}}{5}$ es solución de la EDO:

$$y'' + 2y' - 3y = e^{2x},$$

encuentra una solución de la EDO:

$$y'' + 2y' - 3y = 4x - 5e^{2x}.$$

Solución. Denotando $g_1(x) = x$ y $g_2(x) = e^{2x}$, el término independiente de la EDO es $4g_1(x) - 5g_2(x)$. Las soluciones de las EDO que nos dan son $y_1(x) = -\dfrac{x}{3} - \dfrac{2}{9}$ e $y_2(x) = \dfrac{e^{2x}}{5}$. Por el principio de superposición, la solución buscada es:

$$y(x) = 4y_1(x) - 5y_2(x) = -\frac{4x}{3} - \frac{8}{9} - e^{2x}. \quad \blacksquare$$

Solución general de una EDO lineal no homogénea

Utilizando el principio de superposición, podemos obtener la solución general de una EDO lineal no homogénea:

Teorema 3.7. Si $y_p(x)$ es una solución particular de la EDO no homogénea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{3.16}$$

y las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes de la **ecuación homogénea asociada**:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

entonces, la solución general de (3.16) viene dada por:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p(x),$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias.

Demostración. Si $\phi(x)$ es una solución cualquiera de (3.16), entonces, $\phi(x)$ e $y_p(x)$ son dos soluciones de (3.16). Por el principio de superposición, se tiene que $\phi(x) - y_p(x)$ es solución de la ecuación homogénea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) - g(x) = 0.$$

Como $\{y_1(x), y_2(x)\}$ es un conjunto fundamental de esta ecuación homogénea asociada, se cumple que la solución $\phi(x) - y_p(x)$ es combinación lineal de $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Por tanto, existen constantes C_1 y C_2 tales que:

$$\phi(x) - y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

de donde deducimos que la solución es:

$$\phi(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \blacksquare$$

El teorema 3.7 nos otorga un procedimiento para resolver EDO lineales no homogéneas que se puede resumir de la siguiente manera:

- Hallamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

- Buscamos una solución particular $y_p(x)$ de la EDO completa (es decir, la EDO no homogénea).
- La solución general de la EDO completa es la suma de las dos soluciones anteriores:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

⬣ **Ejemplo 3.10.** Encuentra la solución general de la EDO $y'' - y = 2 - x^2$, sabiendo que $y_p(x) = x^2$ es una solución particular de la misma.

Solución. Busquemos la solución general de la ecuación homogénea asociada $y'' - y = 0$. Su ecuación auxiliar es $r^2 - 1 = 0$ y sus raíces son $r = 1$ y $r = -1$. Por tanto, la solución general de la EDO homogénea asociada es:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

y la solución general de la EDO completa será:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x^2. \blacksquare$$

Cálculo de una solución particular

A continuación, damos dos métodos que nos permiten encontrar una solución particular de una EDO lineal no homogénea de segundo orden:

- el método de los coeficientes indeterminados.
- el método de variación de los parámetros.

En la sección 6.7 veremos un tercer método para encontrar soluciones particulares de EDO lineales de segundo orden basado en la transformada de Laplace.

1. Método de los coeficientes indeterminados

Este método sirve sólo para resolver ecuaciones lineales con coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (3.17)$$

con el término $g(x)$ correspondiente a una función polinómica, exponencial, seno, coseno o una combinación lineal de éstas.

Para encontrar soluciones particulares, supondremos la forma que deberá tener nuestra solución $y_p(x)$ basándonos en la función $g(x)$. La función $y_p(x)$ tendrá ciertos coeficientes sin especificar que deberemos determinar. Para determinarlos, sustituiremos $y_p(x)$ en la EDO. La imposibilidad de determinarlos indicará que la solución propuesta no es válida y debemos, por tanto, modificar la suposición inicial.

El método es limitado a las EDO que hemos comentado arriba pero, en caso de poder aplicarlo, suele ser un método muy efectivo.

Al observar la EDO (3.17), tenemos los siguientes casos en función de $g(x)$:

Caso 1. $g(x)$ es un polinomio de grado n.

Si $g(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, con $a_i \in \mathbb{R}$, se propone como solución particular un polinomio del mismo grado al que le multiplicamos el término x^h:

$$y_p(x) = (A_n x^n + ... + A_1 + A_0)\, x^h.$$

siendo A_n, $A_{n-1}, ..., A_1$, A_0 coeficientes por determinar. El término x^h se añade si 0 es una de las soluciones de la ecuación característica, siendo h su orden de multiplicidad.

Ejemplo 3.11. Considera la EDO

$$y'' + 4y' + 3y = 5x - 2.$$

(a) Encuentra la solución general de la EDO homogénea asociada.

(b) Encuentra una solución particular utilizando el método de coeficientes indeterminados.

(c) Encuentra la solución general de la EDO completa.

Solución. (a) La EDO homogénea asociada es $y'' + 4y' + 3y = 0$ y, su ecuación característica será $r^2 + 4r + 3 = 0$, cuyas raíces son $r = -3$ y $r = -1$. La solución general de la EDO homogénea será, por tanto,

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

(b) Para encontrar una solución particular, fijémonos en que $g(x) = 5x-2$ es un polinomio de grado 1, así que la solución particular será de la forma

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

$y_p(x) = Ax + B$. Como 0 no es raíz de la ecuación característica, no aparecerá el término x^h. Para determinar el valor de A y B, sustituimos $y_p(x)$ en la EDO completa. Como $y_p'(x) = A$ e $y_p''(x) = 0$, tendremos que:

$$y_p'' + 4y_p' + 3y_p = 5x - 2 \longrightarrow 0 + 4A + 3(Ax + B) = 5x - 2$$

y, por tanto,

$$3Ax + 4A + 3B = 5x - 2$$

así que, identificando los coeficientes del polinomio de la izquierda y del polinomio de la derecha tendremos que:

$$3A = 5 \ \text{ y } \ 4A + 3B = -2 \longrightarrow A = \frac{5}{3} \ \text{ y } \ B = -\frac{26}{9}.$$

La solución particular será $y_p(x) = \frac{5}{3}x - \frac{26}{9}$.

(c) La solución general de la EDO completa será:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{5}{3}x - \frac{26}{9}. \quad \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 3.12.** Propón qué forma debe tener la solución particular de la EDO $y'' + 2y' - 8y = 2x^2 + 3$, utilizando el método de coeficientes indeterminados.

Solución. El término no homogéneo $g(x)$ es un polinomio de grado 2 y las raíces del polinomio característico de la EDO homogénea asociada son $r_1 = 2$ y $r_2 = -4$. Como 0 no es raíz, la solución particular será un polinomio de grado dos de la forma:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C. \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 3.13.** Propón qué forma debe tener la solución particular de la EDO $y'' - 5y' = 5x^2 + x$, utilizando el método de coeficientes indeterminados.

Solución. El término no homogéneo $g(x)$ es un polinomio de grado 2 y las raíces del polinomio característico de la EDO homogénea asociada son $r_1 = 0$ y $r_2 = 5$. Como 0 es raíz simple (multiplicidad uno), la solución particular será un polinomio de grado dos por x^1, es decir, de la forma:

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)x = Ax^3 + Bx^2 + Cx. \blacksquare$$

Notemos que el polinomio que proponemos es completo aunque el término no homogéneo $g(x)$ no lo sea.

Si el término independiente $g(x)$ es una constante, deberemos considerarlo como un polinomio de grado 0 y aplicaremos la misma técnica. Es decir, la solución particular será una constante A (otro polinomio de grado 0) salvo en el caso en que 0 sea raíz del polinomio característico, en cuyo caso deberemos multiplicar por el factor x^h donde h indicará el orden de multiplicidad de la raíz 0.

⬢ **Ejemplo 3.14.** Resuelve la EDO $y'' + 3y' = 4$.

Solución. Las raíces de la ecuación característica $r^2 + 3r = 0$ son 0 y -3. Como 0 es solución simple, la solución particular tendrá la forma $y_p(x) = Ax$ y, sustituyendo en la EDO, obtenemos que $A = \dfrac{4}{3}$ y, por tanto, la solución general de la EDO será:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{4}{3}x. \quad \blacksquare$$

Caso II. $g(x)$ **es producto de** $e^{\alpha x}$ **por un polinomio de grado** n.

Si $g(x) = e^{\alpha x}\,(a_n x^n + ... + a_1 x + a_0)$, con $a_i \in \mathbb{R}$, se propone como solución particular el producto de la misma exponencial por un polinomio del mismo grado al que le multiplicamos el término x^h:

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(A_n x^n + ... + A_1 + A_0)\,x^h.$$

siendo A_n, $A_{n-1}, ..., A_1$, A_0 coeficientes por determinar. El término x^h se añade si α es una de las soluciones de la ecuación característica, siendo h su orden de multiplicidad.

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\;(A_n x^n + ... + A_1 + A_0)\,x^h.$$

con A_n, $A_{n-1}, ..., A_1$, A_0 a determinar.

■ **Nota 3.4.** Cuando $\alpha = 0$, estamos en la situación del caso I.

⬢ **Ejemplo 3.15.** Resuelve la EDO $y'' - 2y' + y = e^{2x}(2x + 1)$.

Solución. La ecuación característica de la EDO homogénea asociada es $r^2 - 2r + 1 = 0$, cuyas raíz es $r = 1$, solución doble. Por tanto, la solución de la EDO homogénea será:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

El término no homogéneo $g(x)$ es el producto de una exponencial con $\alpha = 2$ y un polinomio de grado 1. Como 2 no es solución del polinomio característico, no aparece el término x^h en la solución particular, quedando en la forma:

$$y_p(x) = e^{2x}(Ax + B)$$

con coeficientes A y B por determinar. Tendremos que:

$$y_p'(x) = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x}A = e^{2x}(2Ax + 2B + A),$$

$$y_p''(x) = 2e^{2x}(2Ax + 2B + A) + e^{2x}2A = e^{2x}(4Ax + 4B + 4A),$$

así que sustituyendo en la EDO completa, como:

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = e^{2x}(2x + 1)$$

obtendremos,

$$e^{2x}(4Ax + 4B + 4A) - 2e^{2x}(2Ax + 2B + A) + e^{2x}(Ax + B) = e^{2x}(2x + 1).$$

Reordenamos los términos y obtenemos:

$$e^{2x}\left((4A - 4A + A)x + 4B + 4A - 4B - 2A + B\right) = e^{2x}(2x + 1) \to$$
$$e^{2x}\left(Ax + 2A + B\right) = e^{2x}(2x + 1)$$

y, por tanto, identificando los coeficientes, obtenemos:

$$A = 2 \text{ y } 2A + B = 1 \longrightarrow B = -3.$$

La solución particular será $y_p(x) = e^{2x}(2x - 3)$ y la solución general de la EDO completa vendrá dada por:

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + e^{2x}(2x - 3). \quad \blacksquare$$

⬣ **Ejemplo 3.16.** Propón qué forma debe tener la solución particular de la EDO $y'' - 5y' + 6y = xe^{3x}$, utilizando el método de coeficientes indeterminados.

Solución. El término no homogéneo $g(x)$ es una exponencial con $\alpha = 3$ por un polinomio de grado 1. Las raíces del polinomio característico de la EDO homogénea asociada son $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$. Como 3 es raíz simple (multiplicidad uno), la solución particular será e^{3x} por un polinomio de grado uno por el término x^1, es decir, la solución particular tendrá la forma:

$$y_p(x) = e^{3x}(Ax + B)x = e^{3x}(Ax^2 + Bx). \blacksquare$$

⬣ **Ejemplo 3.17.** Propón qué forma debe tener la solución particular de la EDO $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, utilizando el método de coeficientes indeterminados.

Solución. El término no homogéneo $g(x)$ es una exponencial con $\alpha = 4$. Para aplicar el método de coeficientes indeterminados, tengamos en cuenta que esta función es una exponencial por la constante 1, es decir, un polinomio de grado 0. El polinomio característico de la EDO homogénea asociada tiene una raíz doble dada por $r = 4$, así que la solución particular será e^{4x} por un polinomio de grado 0 (una constante) por el término x^2, es decir, la solución particular tendrá la forma:

$$y_p(x) = Ae^{4x}x^2. \blacksquare$$

Caso III. El término no homogéneo es un producto de una exponencial y una combinación de coseno y seno del mismo ángulo multiplicados por polinomios.

Si $g(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\operatorname{sen}(\beta x)\right)$, con $P_n(x)$ un polinomio de grado n y $Q_m(x)$ un polinomio de grado m, entonces, se propone como solución particular una función del mismo tipo:

$$y_p(x) = e^{\alpha x} \left(P_N(x) \cos(\beta x) + Q_N(x) \operatorname{sen}(\beta x) \right) x^h.$$

con $P_N(x)$ y $Q_N(x)$ polinomios de grado $N = \text{máx}\{n, m\}$ y con coeficientes a determinar para cada uno de ellos. El término x^h se añade si $\alpha \pm \beta i$ es solución de la ecuación característica, siendo h su orden de multiplicidad. Si aparece, por ejemplo, la pareja de soluciones simples conjugadas $\alpha \pm \beta i$, multiplicaremos por el factor x^1.

■ **Nota 3.5.** Cuando $\beta = 0$, este caso corresponde al caso II. Y si $\alpha = \beta = 0$, se obtiene el caso I.

⬣ **Ejemplo 3.18.** Resuelve la EDO $y'' - 4y' + 3y = \cos(9x)$.

Solución. La ecuación característica de la EDO homogénea asociada es $r^2 - 4r + 3 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = 3$. Por tanto, la solución de la EDO homogénea será:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

En el término no homogéneo $g(x)$ aparece únicamente la función $\cos(9x)$. Al no aparecer exponencial, tendremos que $\alpha = 0$. Se tiene que $\beta = 9$, el polinomio $P_n(x) = 0$ y el polinomio $Q_n(x) = 1$, es decir, ambos polinomios son de grado 0. Como $\pm 9i$ no es solución del polinomio característico, no aparecerá el término x^h. Teniendo en cuenta todo esto, tendremos que $N = 0$ y la solución particular vendrá dada por:

$$y_p(x) = A \cos(9x) + B \operatorname{sen}(9x)$$

con coeficientes A y B por determinar. Tendremos que:

$$y_p'(x) = -9A \operatorname{sen}(9x) + 9B \cos(9x),$$

$$y_p''(x) = -81A \cos(9x) - 81B \operatorname{sen}(9x),$$

así que, sustituyendo en la EDO completa, como:

$$y_p'' - 4y_p' + 3y_p = \cos(9x)$$

obtendremos,

$$-81A \cos(9x) - 81B \operatorname{sen}(9x) - 4 \left(-9A \operatorname{sen}(9x) + 9B \cos(9x) \right) + \\ 3 \left(A \cos(9x) + B \operatorname{sen}(9x) \right) = \cos(9x).$$

Reordenamos los términos y obtenemos:

$$(-81A - 36B + 3A) \cos(9x) + (-81B + 36A + 3B) \operatorname{sen}(9x) = \cos(9x) \to \\ (-78A - 36B) \cos(9x) + (-78B + 36A) \operatorname{sen}(9x) = \cos(9x)$$

e identificando coeficientes, obtenemos:

$$-78A - 36B = 1 \;\text{ y }\; -78B + 36A = 0 \to A = -\frac{13}{1230} \;\text{ y }\; B = -\frac{6}{1230}.$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

La solución particular será:

$$y_p(x) = -\frac{13}{1230}\cos(9x) - \frac{6}{1230}\,\text{sen}(9x)$$

y la solución general de la EDO completa vendrá dada por:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \frac{13}{1230}\cos(9x) - \frac{6}{1230}\,\text{sen}(9x). \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 3.19. Propón qué forma debe tener la solución particular de la EDO:

$$y'' + 2y' - 15y = e^x(x^2\cos(2x) - x\,\text{sen}(2x)),$$

utilizando el método de coeficientes indeterminados.

Solución. El término no homogéneo $g(x)$ es una exponencial con $\alpha = 1$ por una combinación de seno y coseno con $\beta = 2$ por polinomios de grados 2 y 1. Las raíces del polinomio característico de la EDO homogénea asociada son $r_1 = 3$ y $r_2 = -5$. Como $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 2i$ no es raíz, la solución particular no tendrá el término x^h. Teniendo en cuenta que los polinomios que deben aparecer deben tener ambos grado 2 (ya que es el máximo entre 1 y 2), la solución particular vendrá dada por:

$$y_p(x) = e^x\left((Ax^2 + Bx + C)\cos(2x) + (Cx^2 + Dx + E)\,\text{sen}(2x)\right). \ \blacksquare$$

Ejemplo 3.20. Propón qué forma debe tener la solución particular de la EDO:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x x\,\text{sen}(x)$$

utilizando el método de coeficientes indeterminados.

Solución. El término no homogéneo $g(x)$ tiene exponencial con $\alpha = 1$ por un polinomio de grado 1 por un seno con $\beta = 1$. Las raíces del polinomio característico de la EDO homogénea asociada son $r = 1 \pm i$. Como $\alpha \pm \beta i = 1 \pm i$ es raíz del polinomio característico con multiplicidad 1, la solución particular tendrá el término x^1. Teniendo en cuenta que deben aparecer los términos seno y coseno por polinomios de grado 1, la solución particular vendrá dada por:

$$y_p(x) = e^x\left((Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\,\text{sen}(x)\right)x. \ \blacksquare$$

Caso IV. El término no homogéneo es una suma de los casos anteriores.

Este caso es una consecuencia del principio de superposición que vimos en el teorema 3.6. La propuesta de solución particular vendrá dada por la suma de cada una de las propuestas.

Ejemplo 3.21. Resuelve la EDO $y'' + y' = 3x - 4e^x$.

ISBN: 978-84-17429-33-1

Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Solución. La ecuación característica de la EDO homogénea asociada es $r^2 + r = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 0$ y $r_2 = -1$. Por tanto, la solución de la EDO homogénea será:

$$y_h(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-x} = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

En el término no homogéneo $g(x)$ aparece una suma de dos funciones, un polinomio de grado 1 y una exponencial. Estudiamos cada función separadamente: como 0 es solución del polinomio característico, la solución particular referida al polinomio será un polinomio de grado 1 por x^1. La solución particular referida a la exponencial será la misma exponencial por una constante. En la parte referida a la exponencial no aparecerá el factor x^h ya que 1 no es solución del polinomio característico. La solución particular vendrá dada por:

$$y_p(x) = (Ax + B)x + Ce^x = (Ax^2 + Bx) + Ce^x.$$

Por tanto,

$$y_p'(x) = 2Ax + B + Ce^x \quad \text{y} \quad y_p''(x) = 2A + Ce^x$$

y, sustituyendo en la EDO completa:

$$y_p'' + y_p' = 3x - 4e^x \rightarrow 2A + Ce^x + 2Ax + B + Ce^x = 3x - 4e^x \rightarrow$$
$$2Ax + 2A + B + 2Ce^x = 3x - 4e^x,$$

de donde deducimos que $2A = 3, 2A + B = 0, 2C = -4$ y, por tanto, $A = \frac{3}{2}$, $B = -3$ y $C = -2$. La solución particular será:

$$y_p(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x - 2e^x$$

y la solución general de la EDO completa es:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - 3x - 2e^x. \quad \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 3.22.** Propón qué forma debe tener la solución particular de la EDO $y'' - 4y = 3x + 5e^{2x} + 2x\cos(2x)$, utilizando el método de coeficientes indeterminados.

Solución. El término no homogéneo $g(x)$ es la suma de un polinomio, una exponencial y un polinomio por un coseno. Las raíces del polinomio característico de la EDO homogénea asociada son $r_1 = 2$ y $r_2 = -2$. Teniendo esto en cuenta, sólo afectará al segundo sumando, la exponencial, en la que deberemos multiplicar por el término x^1. En el resto no aparecerá el término x^h. Por tanto, la solución particular será de la forma:

$$y_p(x) = Ax + B + Cxe^{2x} + (Dx + E)\cos(2x) + (Fx + G)\,\mathrm{sen}(2x). \blacksquare$$

2. Método de variación de los parámetros

Consideremos de nuevo la EDO lineal no homogénea de orden dos:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{3.18}$$

de la que conocemos un sistema fundamental de soluciones de la EDO homogénea asociada: $\{y_1(x), y_2(x)\}$. Como ya vimos, la solución general de la EDO homogénea viene dada por:

$$y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \quad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes.}$$

El **método de variación de parámetros** (también denominado de variación de las constantes) consiste en buscar una solución particular de la ecuación no homogénea reemplazando las constantes C_1 y C_2 por dos funciones $v_1(x)$ y $v_2(x)$ que deberemos determinar:

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x). \tag{3.19}$$

Para determinar las funciones $v_1(x)$ y $v_2(x)$, necesitamos al menos dos ecuaciones que las contengan. Una de estas ecuaciones la obtenemos al sustituir la solución particular $y_p(x)$ y sus derivadas en la ecuación diferencial (3.18).

Calculamos la primera derivada y reordenamos sus términos:

$$y_p' = (v_1'y_1 + v_2'y_2) + (v_1y_1' + v_2y_2'). \tag{3.20}$$

Para simplificar cálculos y evitar derivadas de segundo orden de v_1 y v_2 que complican su resolución, imponemos la condición:

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0, \tag{3.21}$$

que nos proporciona una primera ecuación para obtener v_1 y v_2. Con esta condición, la ecuación (3.20) queda,

$$y_p' = v_1y_1' + v_2y_2'.$$

Derivando de nuevo:

$$y_p'' = v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2''$$

y sustituyendo en (3.18),

$$v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2'' + pv_1y_1' + pv_2y_2' + qv_1y_1 + qv_2y_2$$

$$= v_1\left(y_1'' + py_1' + qy_1\right) + v_2\left(y_2'' + py_2' + qy_2\right) + v_1'y_1' + v_2'y_2'$$

$$= v_10 + v_20 + v_1'y_1' + v_2'y_2' = g, \quad \text{(ya que } y_1,\ y_2 \text{ son soluciones de (3.18))}$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

y obtenemos la segunda ecuación que buscamos,

$$v_1' y_1' + v_2' y_2' = g. \tag{3.22}$$

Si existen v_1 y v_2 verificando (3.21) y (3.22), entonces y_p será solución particular de la ecuación no homogénea. Por tanto, tenemos que resolver el siguiente sistema para las incógnitas v_1' y v_2':

$$\left.\begin{array}{rcl} v_1' y_1 + v_2' y_2 & = & 0 \\ v_1' y_1' + v_2' y_2' & = & g. \end{array}\right\}$$

que en forma matricial se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Por el método de Cramer tenemos que:

$$v_1' = \frac{-g(x) y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{g(x) y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}.$$

Notemos que el sistema sí tiene solución, pues el término que aparece en el denominador es el wronskiano de y_1 e y_2, que es no nulo ya que y_1 e y_2 constituyen un conjunto fundamental de soluciones de la homogénea. Integrando las expresiones anteriores obtenemos:

$$v_1 = \int \frac{-g(x) y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx \quad \text{y} \quad v_2 = \int \frac{g(x) y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)} dx.$$

Sustituyendo en la expresión (3.19) llegamos a la solución particular $y_p(x)$.

■ **Nota 3.6.** Cuando integramos para hallar v_1 y v_2, podemos tomar las constantes de integración como cero, ya que al multiplicar por y_1 e y_2 obtendríamos términos que ya están representados en la solución general de la EDO homogénea.

■ **Nota 3.7.** El método de variación de los parámetros o de las constantes es más general que el método de los coeficientes indeterminados porque se puede aplicar también a ecuaciones lineales con coeficientes variables y para cualquiera que sea la forma del término no homogéneo $g(x)$. Sin embargo, la dificultad en la resolución de ciertas integrales nos lleva a utilizar el método de coeficientes indeterminados en muchos de los casos en que podemos aplicarlo.

⬣ **Ejemplo 3.23.** Resuelve la EDO $y'' + y = \sec x$.

Solución. La ecuación característica de la EDO homogénea asociada es $r^2 + 1 = 0$, cuyas soluciones son $r = \pm i$. Por tanto, $\{\cos x, \operatorname{sen} x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la EDO homogénea y su solución general será:

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x.$$

Tomamos como solución particular de la EDO completa una función de la forma:

$$y_p(x) = v_1(x)\cos x + v_2(x)\operatorname{sen} x$$

con v_1 y v_2 funciones que deberemos determinar. Teniendo en cuenta que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, deberá cumplirse que:

$$\begin{cases} \cos x\, v_1' + \operatorname{sen} x\, v_2' = 0 \\ -\operatorname{sen} x\, v_1' + \cos x\, v_2' = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Resolvemos el sistema aplicando la regla de Cramer. Denotando por W al wronskiano de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, tendremos que:

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1,$$

tendremos que:

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{W} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x \end{vmatrix}}{1} = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{W} = \frac{1}{1} = 1.$$

Integrando, obtenemos:

$$v_1(x) = \int -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$$

y

$$v_2(x) = \int 1 dx = x.$$

Por tanto,

$$y_p(x) = \cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x$$

y la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x. \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 3.24.** Encuentra una solución particular de la EDO $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{1+x^2}$.

La ecuación característica de la EDO homogénea asociada es $r^2+6r+9 = 0$, cuya solución doble es $r = -3$. Por tanto, $\{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$ es un conjunto

fundamental de soluciones de la EDO homogénea y su solución general será:

$$y_h(x) = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}.$$

Tomamos como solución particular de la EDO completa una función de la forma:

$$y_p(x) = v_1(x)e^{-3x} + v_2(x)xe^{-3x}$$

con v_1 y v_2 funciones que deberemos determinar. Deberá cumplirse que:

$$\left\{\begin{array}{l} e^{-3x}\,v_1' + xe^{-3x}\,v_2' = 0 \\ -3e^{-3x}\,v_1' + (e^{-3x} - 3xe^{-3x})\,v_2' = \dfrac{e^{-3x}}{1+x^2}. \end{array}\right.$$

Resolvemos el sistema aplicando la regla de Cramer. Denotando por W al wronskiano de las funciones e^{-3x} y xe^{-3x}, tendremos que:

$$W = \left| \begin{array}{cc} e^{-3x} & xe^{-3x} \\ -3e^{-3x} & e^{-3x} - 3xe^{-3x} \end{array} \right| = e^{-6x}(1 - 3x + 3x) = e^{-6x}.$$

Y, por tanto,

$$v_1'(x) = \frac{\left| \begin{array}{cc} 0 & xe^{-3x} \\ \dfrac{e^{-3x}}{1+x^2} & (1-3x)e^{-3x} \end{array} \right|}{W} = -\frac{xe^{-6x}}{e^{-6x}(1+x^2)} = -\frac{x}{1+x^2},$$

$$v_2'(x) = \frac{\left| \begin{array}{cc} e^{-3x} & 0 \\ -3e^{-3z} & \dfrac{e^{-3x}}{1+x^2} \end{array} \right|}{W} = \frac{e^{-6x}}{e^{-6x}(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrando, obtenemos:

$$v_1(x) = \int -\frac{x}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

y

$$v_2(x) = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x.$$

Por tanto,

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{-3x}\ln(1+x^2) + xe^{-3x}\arctan x. \quad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 3.2

1. Encuentra mediante el método de los coeficientes indeterminados, si se puede, una solución particular de la ecuación $y'' + 2y' - 3y = g(x)$, siendo $g(x)$:

(a) $g(x) = \cos(2x)$.
(b) $g(x) = 2e^{-4x}$.
(c) $g(x) = 50x \cos x$.
(d) $g(x) = 25e^{x} + 36xe^{-2x}$.
(e) $g(x) = \tan x$.
(f) $g(x) = 289xe^{x} \operatorname{sen} x - 34e^{x} \cos x$.

(Solución. (a) $y_p(x) = -\dfrac{4}{50} \operatorname{sen}(2x) - \dfrac{3}{50} \cos(2x)$,

(b) $y_p(x) = \dfrac{2}{5} e^{-4x}$,

(c) $y_p(x) = (-10x + 1) \cos x + (5x + 7) \operatorname{sen} x$,

(d) $y_p(x) = e^{-2x}(-12x + 8) + e^{x}(\dfrac{25}{4}x - \dfrac{25}{16})$,

(e) No funciona el método de coeficientes indeterminados.

(f) $y_p(x) = e^{x}((-17x + 68) \operatorname{sen} x - 68x \cos x)$**)**.

2. Resuelve la siguiente EDO:

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}.$$

(Solución. $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \dfrac{1}{2} x^2 e^{-x}$**)**.

3. Encuentra la solución general de las EDO siguientes utilizando el método de variación de parámetros para hallar una solución particular:

(a) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.
(b) $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x} \ln x$.

(Solución. (a) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x e^{-x}(-1 + \ln x)$,
(b) $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + \dfrac{1}{4} x^2 e^{-3x}(2 \ln x - 3)$**)**.

3.3. Aplicaciones de las EDO lineales de segundo orden. Vibraciones mecánicas

Muchos problemas en que aparecen vibraciones mecánicas o el flujo de corrientes eléctricas se modelizan con una EDO de segundo orden. En esta sección, estudiaremos problemas de vibraciones mecánicas que pueden aparecer en la modelización de la amortiguación de un coche, en la vibración de un puente debido al viento y al tráfico o incluso en la vibración de las alas de un avión debido a los motores y al viento.

Para estudiar estas vibraciones se toma como modelo un sistema masa-resorte, consistente en una espiral suspendida de un soporte rígido con

una masa sujeta al extremo. Para analizar este sistema se aplica *la Ley de Hooke* y la *segunda Ley de Newton*. La Ley de Hooke establece que el resorte ejerce una fuerza de restitución opuesta a la dirección del alargamiento del resorte con una magnitud directamente proporcional al valor del alargamiento. Es decir, $F = ks$, donde s es el alargamiento y k es una constante que depende de las condiciones físicas. Para hallar k, tengamos en cuenta que si suspendemos una masa m del muelle y éste experimenta un alargamiento l hasta alcanzar la posición de equilibrio, aplicando la Ley de Hooke, y teniendo en cuenta que el peso y la fuerza de restitución son de igual magnitud pero con sentido contrario, obtendremos $mg = kl$ y podemos despejar k.

Consideramos un eje vertical para representar el desplazamiento de la masa. Tomamos $x = 0$ como posición de equilibrio y consideramos $x > 0$ cuando la masa se encuentre por debajo de dicha posición y $x < 0$ cuando se encuentre por encima (ver figura 3.2).

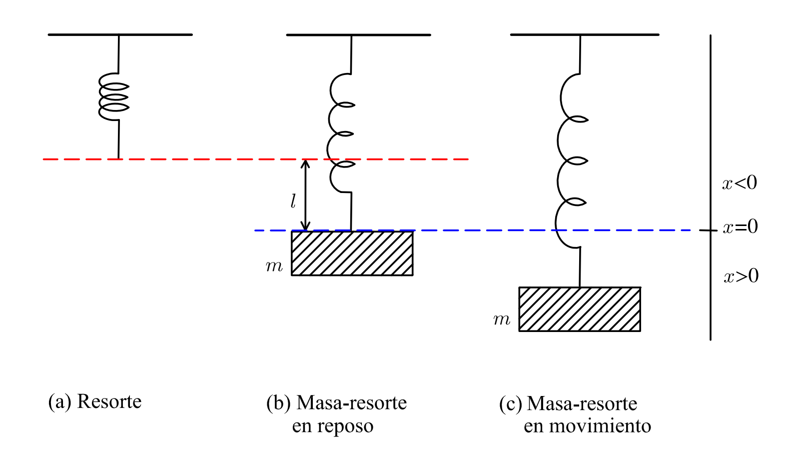


Figura 3.2: Sistema masa-resorte.

Sobre la masa m pueden actuar las siguientes fuerzas:

- **Gravedad:** $F_1 = mg$ dirigida hacia abajo.
- **Fuerza de restitución:** $F_2 = -k\,(x + l)$, proporcional al alargamiento del resorte y de sentido opuesto al movimiento. Como $mg = kl$ (al tomar $x = 0$), podemos expresar la fuerza de restitución como $F_2 = -kx - mg$.
- **Fuerza de amortiguación:** $F_3 = -b\dfrac{dx}{dt}$, donde $b > 0$ es la constante de amortiguación dada en unidades de masa/tiempo. Un ejemplo de esta fuerza sería la resistencia del aire o la fricción debida a un amortiguador. Suponemos normalmente que la fuerza de amortiguación es proporcional a la magnitud de la velocidad de la masa, pero en sentido opuesto al desplazamiento.

Cristina Chiralt Monleón y Alejandro Miralles Montolío
ISBN: 978-84-17429-33-1
Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

- **Fuerzas externas:** $F_4 = f(t)$, la resultante de todas las fuerzas externas que actúen sobre la masa. Un ejemplo sería la fuerza ejercida sobre un automóvil ocasionada por los baches de la carretera.

Aplicando la segunda Ley de Newton, tendremos que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - mg - b\frac{dx}{dt} + f(t),$$

obteniéndose la EDO lineal de segundo orden:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t). \tag{3.23}$$

En función del valor de b, obtendremos:

- **Sistema no amortiguado.** Si $b = 0$.
- **Sistema amortiguado.** Si $b \neq 0$.

Y en función del valor de $f(t)$, obtendremos:

- **Movimiento libre.** Si $f(t) = 0$.
- **Movimiento forzado.** Si $f(t) \neq 0$.

A continuación, estudiamos cada uno de los casos posibles salvo el caso del movimiento forzado. Este caso y el fenómeno conocido como resonancia puede estudiarse en el anexo 3.7.3. Todos los casos que analizamos son igualmente válidos para el caso en el que trabajamos con circuitos eléctricos ya que se obtiene el mismo tipo de EDO.

1. Movimiento libre no amortiguado

En este caso, la ecuación (3.23) se reduce a:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Dividiendo por m, se obtiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Se trata de una EDO homogénea cuya ecuación característica viene dada por $r^2 + \omega^2 = 0$, así que sus raíces son $r = \pm\omega i$ y su solución general es:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega t).$$

Utilizando algunos cambios trigonométricos, obtenemos que:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \tag{3.24}$$

donde:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{y} \quad \phi = \arctan \frac{C_1}{C_2}.$$

Este tipo de movimiento se denomina **movimiento armónico simple**. La constante A representa la **amplitud del movimiento** y ϕ se denomina **ángulo de fase**. El movimiento es periódico con periodo $P = \dfrac{2\pi}{\omega}$ y frecuencia natural $\dfrac{\omega}{2\pi}$.

■ **Nota 3.8.** Observemos que la amplitud y el ángulo de fase dependen de C_1 y C_2 y, por tanto, de las condiciones iniciales, es decir, de la posición y de la velocidad inicial en el problema. Sin embargo, el periodo y la frecuencia sólo dependen de ω, es decir, de k y de m.

2. Movimiento libre amortiguado

En el caso en que aparezca fricción o amortiguación y, en ausencia de fuerzas externas, la ecuación (3.23) queda:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Las raíces del polinomio característico vienen dadas por:

$$r = -\frac{b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}. \tag{3.25}$$

y, dependiendo del discriminante, obtenemos distintas posibilidades:

2.1. **Movimiento subamortiguado (u oscilatorio).** Se presenta cuando:

$$b^2 < 4mk,$$

lo que significa que la amortiguación es pequeña. Denotando:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m},$$

la solución general vendrá dada por la expresión:

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \operatorname{sen}(\beta t)).$$

De donde obtenemos:

$$x(t) = Ae^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \phi)$$

donde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ y $\phi = \arctan \dfrac{C_1}{C_2}$. El factor exponencial se denomina **factor de amortiguación** y el factor con la función seno se denomina **factor senoidal**, que es el que explica el movimiento oscilatorio.

■ **Nota 3.9.** El factor senoidal explica por qué el sistema se llama subamortiguado, ya que no hay suficiente amortiguación para prevenir que éste oscile (ver figura 3.3). De todas formas, como b y m son constantes positivas, se tiene que $\alpha < 0$ y el factor de amortiguación $e^{\alpha t}$ tiende a 0 cuando t tiende a $+\infty$. Como $|x(t)| \leq Ae^{\alpha t}|\operatorname{sen}(\beta t + \phi)| \leq Ae^{\alpha t}$ puesto que la función seno se encuentra entre -1 y 1, tendremos que $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

Puesto que este factor senoidal varía entre -1 y 1 y tiene periodo $\dfrac{2\pi}{\beta}$, se tiene que la solución varia entre $-Ae^{\alpha t}$ y $Ae^{\alpha t}$.

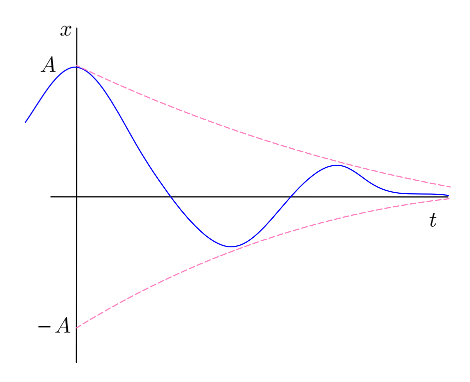


Figura 3.3: Movimiento libre subamortiguado.

2.2. **Movimiento críticamente amortiguado.** Se presenta cuando $b^2 = 4mk$. En este caso, la ecuación característica tiene la raíz doble:

$$r = -\frac{b}{2m}$$

y la solución general viene dada por la expresión:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{b}{2m}t}. \tag{3.26}$$

La oscilación dada por el término senoidal del caso anterior no aparece. Sin embargo,

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1 + C_2 t}{e^{\frac{b}{2m}t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_2}{\frac{b}{2m} e^{\frac{b}{2m}t}} = 0,$$

al igual que en el caso anterior. Además,

$$x'(t) = \left(C_2 - \frac{b}{2m} C_1 - \frac{b}{2m} C_2 t \right) e^{-\frac{b}{2m}t}$$

así que, sin tener en cuenta la solución trivial ($C_1 = C_2 = 0$), se deduce que la derivada se anula a lo sumo en punto, con lo que $x(t)$ tiene como mucho un máximo o un mínimo local para $t > 0$

y, por tanto, no oscila. Cualitativamente tenemos tres posibilidades de movimiento dependiendo de las condiciones iniciales (ver figura 3.4).

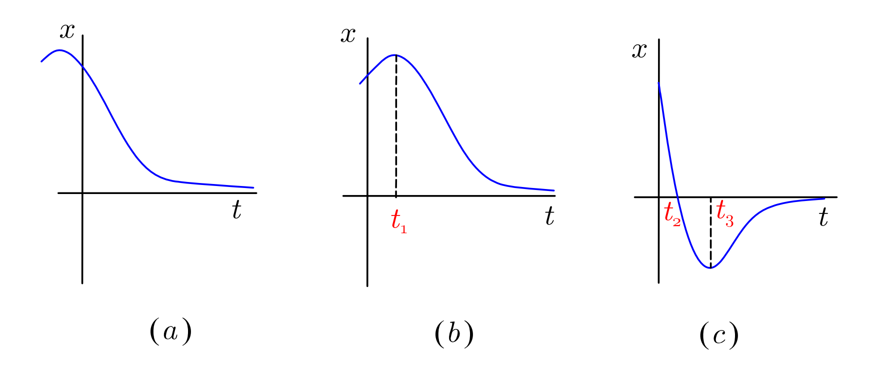


Figura 3.4: Movimiento críticamente amortiguado.

En el caso (a) la masa m no pasa por la posición de equilibrio ni alcanza un desplazamiento extremo relativo para $t > 0$. Simplemente se aproxima al equilibrio monótonamente cuando t tiende a $+\infty$.

En el caso (b) la masa m no pasa por la posición de equilibrio para $t > 0$, pero su desplazamiento alcanza un extremo único para $t = t_1 > 0$. Después, la masa tiende monótonamente a la posición de equilibro cuando t tiende a $+\infty$.

En el caso (c) la masa pasa por su posición de equilibrio una vez, en $t = t_2 > 0$; luego alcanza su desplazamiento extremo en $t = t_3$, tendiendo al equilibrio de forma monótona cuando t tiende a $+\infty$.

Este movimiento se llama críticamente amortiguado porque b se encuentra en un valor límite. Si disminuyese de valor, aparecería la oscilación del caso anterior.

2.3. **Movimiento sobremortiguado.** Se presenta cuando $b^2 > 4mk$. En este caso, el polinomio característico tendrá dos raíces reales distintas y negativas r_1 y r_2 y la solución general será:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

que cumplirá también que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

Además,

$$x'(t) = e^{r_1 t}(C_1 r_1 + C_2 r_2 e^{(r_2 - r_1)t});$$

con lo que una solución no trivial puede tener a lo sumo un máximo o un mínimo local para $t > 0$. El movimiento es cualitativamente igual al descrito en el caso anterior.

3. Vibraciones forzadas

Como ya hemos comentado, el estudio de las vibraciones de un sistema masa-resorte cuando se aplica una fuerza externa $f(t)$ se estudia en el anexo 3.7.3.

Ejemplo 3.25. En el estudio de un resorte vibratorio con amortiguación se llega a un problema de valor inicial de la forma:

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

siendo $x(t)$ el desplazamiento medido a partir de la posición de equilibrio en un instante t y donde:

m = masa sujeta al sistema,

b = constante de amortiguación,

k = constante del resorte,

x_0 = desplazamiento inicial,

v_0 = velocidad inicial.

Determinemos la ecuación del movimiento de este sistema cuando $m = 36$ kg, $b = 12$ kg/sg, $k = 37$ kg/sg^2, $x_0 = 70$ cm y $v_0 = 10$ cm/sg. Halla el desplazamiento al cabo de 10 segundos.

Solución. Buscamos la solución de la ecuación diferencial:

$$36x'' + 12x' + 37x = 0$$

con condiciones iniciales $x(0) = 70$ y $x'(0) = 10$. La ecuación auxiliar asociada es:

$$36r^2 + 12r + 37 = 0$$

cuyas raíces son $r = -\frac{1}{6} \pm i$. Por tanto, la solución general es:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{1}{6}t} \cos t + C_2 e^{-\frac{1}{6}t} \operatorname{sen} t.$$

Sustituyendo $x(0) = 70$, tenemos que $70 = C_1$. Para sustituir la otra condición inicial debemos derivar $x(t)$:

$$x'(t) = -\frac{1}{6} C_1 e^{-\frac{1}{6}t} \cos t - C_1 e^{-\frac{1}{6}t} \operatorname{sen} t - \frac{1}{6} C_2 e^{-\frac{1}{6}t} \operatorname{sen} t + C_2 e^{-\frac{1}{6}t} \cos t;$$

sustituyendo ahora $x'(0) = 10$, se tiene:

$$10 = -\frac{1}{6} C_1 + C_2, \text{ de donde } C_2 = \frac{65}{3}$$

y la solución del problema de valor inicial es:

$$x(t) = 70 e^{-\frac{1}{6}t} \cos t + \frac{65}{3} e^{-\frac{1}{6}t} \operatorname{sen} t.$$

Al cabo de 10 segundos, el desplazamiento será:

$$x(10) = 70 e^{-\frac{5}{3}} \cos 10 + \frac{65}{3} e^{-\frac{5}{3}} \operatorname{sen} 10 \simeq -13.32 \text{ cm.} \quad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 3.3

1. Indica si las siguientes EDO modelizan movimientos subamortiguados, críticamente amortiguados o sobreamortiguados.

   (a) $y'' + 4y' + 3y = 0$.

   (b) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

   (c) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

   (Solución. (a) subamortiguado, (b) críticamente amortiguado, (c) sobreamortiguado**).**

2. La siguiente ecuación diferencial modeliza una oscilación lineal de un sistema masa-resorte:

$$3x'' + 6x' + 6x = 0.$$

   En ausencia de fuerzas externas y teniendo en cuenta que en el instante inicial desplazamos la masa 3 m. por debajo de la posición de equilibrio y la soltamos sin impulso inicial, ¿cuál será la posición de la masa al cabo de 1 segundo?

   (Solución. $x(t) = 3e^{-x}(\operatorname{sen} x + \cos x)$ y $x(1) = 1.52$ m**).**

3. La suspensión de un automóvil se puede modelizar como un muelle que vibra con amortiguamiento debido a los amortiguadores. Esto lleva a la ecuación:

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0,$$

   donde m es la masa del automóvil, b es la constante de amortiguamiento de los amortiguadores, k es la constante del muelle y $x(t)$ es el desplazamiento vertical del automóvil en el tiempo t. Si la masa del automóvil es de 1000 kg y la constante del muelle es 3000 kg/sg^2, determinad el valor mínimo de la constante de amortiguamiento b (en kg/sg) que proporcionará un viaje libre de oscilaciones. Si reemplazamos los muelles por otros que tienen una constante k doble que la anterior, ¿cómo varía este valor mínimo de b?
   (Solución. $b = 2000\sqrt{3}$, $\sqrt{2}b$**).**

3.4. EDO lineales de orden n

La teoría para las EDO lineales de cualquier orden es una generalización de la teoría vista para el caso de ecuaciones de segundo orden. Como ya explicamos en el tema 1, una EDO lineal de orden n es aquella que se puede expresar de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_o(x)y = b(x).$$

Si $b(x) = 0$ se dice la EDO es homogénea.

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Si $a_n(x) \not\equiv 0$ en el intervalo $]a, b[$, podemos dividir por $a_n(x)$ y expresar la ecuación en forma canónica:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = g(x). \tag{3.27}$$

El siguiente teorema resume las condiciones bajo las cuales un problema de valor inicial formado por una EDO lineal de orden n con n condiciones iniciales, tiene solución y es única:

■ **Teorema 3.8.** Si $p_{n-1}(x), ..., p_0(x)$, $g(x)$ son funciones contínuas en algún intervalo $]a, b[$ que contiene al punto x_0, entonces el problema de valor inicial:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = g(x)$$

con las condiciones iniciales:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

tiene una única solución en ese intervalo para cualquier elección de los valores y_0, $y_1, ..., y_{n-1}$.

De forma análoga a las EDO lineales de segundo orden, también aparece el wronskiano cuando trabajamos en EDO lineales de orden n:

■ **Definición 3.6.** El **wronskiano** de las funciones derivables:

$$y_1(x), \cdots, y_n(x)$$

viene dado por la expresión:

$$W[y_1, \cdots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}.$$

El siguiente teorema nos proporciona la expresión para la solución general de una EDO lineal homogénea de orden n:

■ **Teorema 3.9.** Consideramos la EDO lineal homogénea:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0,$$

donde $p_i(x)$ son funciones continuas en $]a, b[$. Si $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ son soluciones de esta EDO en el intervalo $]a, b[$ y se tiene que:

$$W[y_1, ..., y_n](x_0) \neq 0$$

para algún valor de x_0 de $]a, b[$, entonces la solución general de la EDO en $]a, b[$ viene dada por la expresión:

$$y(x) = C_1y_1(x) + ... + C_ny_n(x),$$

con $C_1, ..., C_n$ constantes arbitrarias.

Nota 3.10. Al igual que en el caso $n = 2$, si las funciones $y_1, ..., y_n$ son soluciones de una EDO lineal de orden n en $]a, b[$, entonces su wronskiano no se anula en $]a, b[$ o es idénticamente nulo en $]a, b[$. La condición $W[y_1, ..., y_n](x) \neq 0$ nos asegura que las funciones $y_1(x), ..., y_n(x)$ son linealmente independientes en $]a, b[$. El conjunto $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ se denomina **conjunto o sistema fundamental de soluciones**.

Al igual que en las EDO lineales de orden 2, la solución general de una EDO lineal de orden n se obtiene como suma de la solución general de la EDO homogénea asociada y una solución particular de la EDO completa.

Teorema 3.10. Si $y_p(x)$ una solución particular de la EDO completa:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y = g(x)$$

en $]a, b[$ y $\{y_1(x), ..., y_n(x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada, entonces la solución general de la EDO completa en $]a, b[$ viene dada por:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x) + y_p(x).$$

donde $C_1, \cdots, C_n$ son constantes arbitrarias.

Se puede generalizar la resolución de EDO lineales de segundo orden homogéneas con coeficientes constantes al caso de orden n. Igualmente, puede extenderse el cálculo de soluciones particulares por el método de coeficientes indeterminados (sólo para EDO con coeficientes constantes) y por el método de variación de parámetros (este último válido también para EDO con coeficientes variables). En este tema estudiaremos únicamente las soluciones de EDO homogéneas y daremos el método de coeficientes indeterminados para el cálculo de soluciones particulares.

EDO homogéneas con coeficientes constantes

La EDO lineal de orden n homogénea con coeficientes constantes:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + ... + a_1 y'(x) + a_0 y = 0 \tag{3.28}$$

con $a_n \neq 0$, tiene siempre solución en todo $\mathbb{R}$. El **polinomio característico** asociado viene dado por:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0$$

y la **ecuación característica** viene dada por:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Para construir un conjunto fundamental de soluciones, calcularemos las raíces del polinomio característico y tendremos en cuenta las siguientes posibilidades:

1. Para cada raíz real r de multiplicidad 1, la función e^{rx} es solución de la EDO y formará parte del sistema fundamental de soluciones de (3.28).
2. Para cada raíz real r de multiplicidad $m \geq 2$, las funciones:

$$e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, ..., x^{m-1}e^{rx}$$

   son soluciones de la EDO linealmente independientes y formarán parte del sistema fundamental de soluciones de (3.28).
3. Para cada raíz compleja $\alpha \pm i\beta$ de multiplicidad 1, las funciones $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ son soluciones de la EDO linealmente independientes y formarán parte del sistema fundamental de soluciones de (3.28).
4. Para cada raíz compleja $\alpha \pm i\beta$ de multiplicidad $m \geq 2$, las funciones:

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \cdots, \\ x^{m-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), x^{m-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

   son soluciones de la EDO linealmente independientes y formarán parte del sistema fundamental de soluciones de (3.28).

Todas las funciones que aparecen en los cuatro casos son linealmente independientes entre ellas y esto nos permitirá obtener un sistema fundamental de soluciones. La solución general vendrá dada por cualquier combinación lineal de éstas.

⬣ **Ejemplo 3.26.** Encuentra la solución general de las siguientes EDO lineales homogéneas:

(a) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

(b) $y''' + 6y'' + 13y' + 10y = 0$.

(c) $y^{(iv)} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$.

(d) $y^{(iv)} + 12y''' + 62y'' + 156y' + 169y = 0$.

(Solución.

(a) La ecuación característica viene dada por $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1, r_2 = 2$ y $r_3 = 3$. Las tres son reales y simples, así que $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones y la solución general es:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}.$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

(b) La ecuación característica viene dada por $r^3 + 6r^2 + 13r + 10 = 0$, cuyas raíces son $r = -2 \pm i$ y $r = -2$, así que $\{e^{-2x}, e^{-2x}\cos x, e^{-2x}\operatorname{sen} x\}$ es un sistema fundamental de soluciones y la solución general es:

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-2x}\cos x + C_3e^{-2x}\operatorname{sen} x.$$

(c) La ecuación característica viene dada por $r^4 - r^3 - 3r^2 + 5r - 2 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = -2$ con orden de multiplicidad 1 y $r_2 = 1$ con orden de multiplicidad 3. Por tanto, $\{e^{-2x}, e^x, xe^x, x^2e^x\}$ es un sistema fundamental de soluciones y la solución general es:

$$y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x + C_3xe^x + C_4x^2e^x.$$

(d) La ecuación característica viene dada por $r^4 + 12r^3 + 62r^2 + 156r + 169 = 0$, es decir, $(r^2 + 6r + 13)^2 = 0$, cuyas raíces son $r = -3 \pm 2i$ con orden de multiplicidad 2. Por tanto, $\{e^{-3x}\cos(2x), e^{-3x}\operatorname{sen}(2x), xe^{-3x}\cos(2x), xe^{-3x}\operatorname{sen}(2x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones y la solución general es:

$$y(x) = C_1e^{-3x}\cos(2x) + C_2e^{-3x}\operatorname{sen}(2x) + C_3xe^{-3x}\cos(2x) + C_4xe^{-3x}\operatorname{sen}(2x)).$$

EDO no homogéneas. El método de coeficientes indeterminados

Estudiaremos aquí únicamente el método de coeficientes indeterminados para el cálculo de una solución particular en el caso en que la EDO tenga coeficientes constantes. El método seguirá siendo válido, al igual que en las EDO de segundo orden, siempre que el término no homogéneo sea una función polinómica, exponencial, seno, coseno o suma finita de éstas.

■ **Nota 3.11.** La propuesta para solución particular vendrá dada por la misma que vimos en el caso de las EDO lineales de orden 2 según los casos 1, 2 y 3. La diferencia con respecto a las EDO de orden 2 es que el factor x^h que aparecía en cada uno de esos casos, podría tener grado mayor o igual a 2.

⬢ **Ejemplo 3.27.** Resolvamos la ecuación diferencial:

$$y''' + 3y'' - 4y = x^2 - 2x.$$

Solución. Las raíces del polinomio característico asociado a la EDO homogénea son $r_1 = 1$ raíz simple y $r_2 = -2$ raíz doble. Por tanto, la solución de la EDO homogénea vendrá dada por:

$$y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3xe^{-2x}.$$

El término no homogéneo es $g(x) = x^2 - 2x$. Como 0 no es solución del polinomio característico, no aparecerá el término x^h y una solución particular tendrá la forma:

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C),$$

con A, B y C coeficientes indeterminados. Como:

$$y_p''' + 3y_p'' - 4y_p = x^2 - 2x.$$

y las derivadas vienen dadas por:

$$y_p'(x) = 2Ax + B, \quad y_p''(x) = 2A, \quad y_p'''(x) = 0,$$

tendremos al sustituir en la EDO:

$$0+3\cdot 2A-4(Ax^2+Bx+C) = x^2-2x \to -4Ax^2-4Bx+6A-4C = x^2-2x$$

Igualando coeficientes, obtenemos que $-4A = 1$, $-4B = -2$ y $6A - 4C = 0$. Por tanto, $A = -\frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{2}$ y $C = -\frac{3}{8}$. Luego, la solución particular es:

$$y_p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}$$

y la solución general de la EDO completa es:

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3xe^{-2x} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}. \quad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 3.4

1. Resuelve las ecuaciones diferenciales:
   (a) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$.
   (b) $y^{v)} + 3y^{iv)} + 4y''' + 12y'' + 4y' + 12y = 0$.
   (c) $y''' + y'' - 4y' + 6y = 0$.
   (d) $y^{(iv)} - 2y''' + 2y' - y = 0$.
   (e) $y^{(iv)} + y''' - 5y'' + y' - 6y = 0$.
   (Solución. (a) $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x}$.
   (b) $y(x) = C_1e^{-3x} + (C_2 + C_3x)\cos(\sqrt{2}x)) + (C_4 + C_5x)\,\text{sen}(\sqrt{2}x)$.
   (c) $y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^x\cos x + C_3e^x\,\text{sen}\,x$.
   (d) $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + C_4e^{-x}$.
   (e) $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + C_3\cos x + C_4\,\text{sen}\,x$**)**.
2. Resuelve el problema de valor inicial:
   $$y''' - 2y'' - 3y' = x^2$$
   con las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2$.
   (Solución. $y(x) = \frac{1}{81}\left(14e^{3x} + 148 - 42x + 18x^2 - 9x^3\right)$**)**.
3. Escribe una ecuación diferencial cuyo sistema fundamental de soluciones sea:
   $$\{1, e^x, e^{-3x}, xe^{-3x}\}.$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

3.5. La transformada de Laplace

La **transformada de Laplace** (TL) permite resolver problemas de valor inicial cuando las EDO son lineales con coeficientes constantes. Su estudio surge de manera natural en el contexto de los circuitos eléctricos donde aparecen funciones con ciertas discontinuidades con las que los métodos estudiados no se pueden aplicar. La transformada de Laplace tiene múltiples aplicaciones en el control de procesos en ingeniería: control de la temperatura y humedad de edificios, control de un coche o un avión para que se desplacen de manera exacta y de forma segura, en la industria, en los controles de procesos de manufactura, en satélites, etc.

El proceso para resolver una EDO consiste en aplicar la transformada de Laplace a una EDO lineal que la transformará en una ecuación algebraica que podremos manipular de manera sencilla. El uso de la llamada transformada inversa de Laplace nos dará la solución particular que buscamos. Nuestros objetivos en esta sección serán:

- Hallar la TL de determinadas funciones aplicando su definición y establecer una tabla de TL.
- Calcular la TL y la transformada inversa a partir de tablas de las transformadas de funciones elementales y propiedades de la transformada.
- Resolver EDO lineales con condiciones iniciales con la TL.
- Aplicación de la TL a EDO lineales que involucran la *función escalón* y la *función delta de Dirac*.

3.5.1. Tabla y propiedades de la Transformada de Laplace

■ **Definición 3.7.** La transformada de Laplace de la función $f(t)$ viene dada por la función:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

en todos los valores s donde la integral impropia converge. La transformada de Laplace de la función $f(t)$ se denota por $L[f(t)]$ o simplemente $F(s)$.

■ **Nota 3.12.** No todas las funciones admiten transformada de Laplace, pero las funciones con las que trabajamos normalmente sí lo hacen. Para profundizar en la existencia de la TL, puede consultarse el anexo 3.7.4.

Veamos cómo calcular la transformada de Laplace de funciones sencillas.

⬢ **Ejemplo 3.28.** Calcula la transformada de Laplace de la función $f(t) = 1$.

Solución. Aplicando la definición,

$$L[1] = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-ts} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s} \quad \text{si } s > 0. \ \blacksquare$$

Nota 3.13. La integral impropia anterior es convergente sólo si $s > 0$. En otro caso, la integral no existe. En general, el dominio de una TL (valores donde la transformada existe) es un conjunto de la forma $s > a$ para algún número a.

Ejemplo 3.29. Calcula la transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{at}$ para una constante a distinta de cero.

Solución. Aplicando la definición de la transformada de Laplace,

$$L\left[e^{at}\right] = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(st-at)}\,dt = \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^\infty.$$

Si $s - a > 0$, entonces $e^{-(st-at)} \to 0$, cuando $t \to \infty$. Por tanto,

$$L\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a} \quad \text{para} \quad s > a. \ \blacksquare$$

Ejemplo 3.30. Calcula la transformada de Laplace de la función $f(t) = t$.

Solución. Calculamos su transformada,

$$L[t] = \int_0^\infty te^{-st}\,dt = \left[e^{st}\left(\frac{t}{s} - \frac{1}{s^2}\right)\right]_0^\infty = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}(1+st)}{s^2}\right] + \frac{1}{s^2}.$$

Podemos calcular el límite aplicando la regla de L'Hôpital y la integral es convergente siempre que $s > 0$. Por tanto,

$$L[t] = \frac{1}{s^2} \quad \text{para todo } s > 0. \ \blacksquare$$

Ejemplo 3.31. Calcula la transformada de Laplace de la función $f(t) = \operatorname{sen} bt$, donde b es una constante distinta de cero.

Solución. Calculamos su transformada integrando por partes dos veces:

$$L[\operatorname{sen} bt] = \int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} bt\,dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}(s\operatorname{sen} bt + b\cos bt)\right]_0^\infty =$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s^2+b^2}(s\operatorname{sen} bt + b\cos bt)\right] + \frac{b}{b^2+s^2}.$$

Calculamos el límite aplicando la regla de l'Hôpital y comprobamos que da 0 para $s > 0$. Por tanto,

$$L[\operatorname{sen} bt] = \frac{b}{b^2+s^2} \quad \text{para todo } s > 0. \ \blacksquare$$

En la tabla siguiente aparecen las transformadas de algunas funciones elementales que pueden calcularse aplicando la definición.

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}, \; s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \; s>a$
$t^n, \; n=1,2,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \; s>0$
$e^{at}t^n, \; n=1,2,\ldots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \; s>a$
$\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}, \; s>0$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}, \; s>0$
$e^{at}\operatorname{sen}(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \; s>a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \; s>a$

Propiedades de la transformada de Laplace

Las propiedades de la transformada de Laplace permiten el cálculo de manera más sencilla. Estas propiedades se basan, principalmente, en la definición de la transformada con la integral impropia. En todas las propiedades que vamos a estudiar, supondremos que las funciones que aparecen cumplen las condiciones que se requieren para que exista la TL.

P1) Linealidad. Si a y b son constantes, entonces:

$$L\left[a\,f(t)+b\,g(t)\right]=a\,L\left[f(t)\right]+b\,L\left[g(t)\right]. \tag{3.29}$$

Ejemplo 3.32. Calcula $L\left[3e^{2t}+2\operatorname{sen}^2(3t)\right]$.

Solución. Aplicando la linealidad y teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$, obtenemos:

$$L\left[3e^{2t}+2\operatorname{sen}^2(3t)\right]=L\left[3e^{2t}+1-\cos 6t\right]=3L\left[e^{2t}\right]+L\left[1\right]-L\left[\cos 6t\right]=$$

$$=\frac{3}{s-2}+\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+36}=\frac{3s^3+144s-72}{s(s-2)(s^2+36)}, \quad \text{para} \quad s>2. \blacksquare$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

P2) Propiedad de la traslación. Si $L[f] = F(s)$ existe para $s > \alpha$, entonces:

$$L\left[e^{at} f\right] = F(s-a) \quad \text{para} \quad s > \alpha + a.$$

Ejemplo 3.33. Esto nos permite, por ejemplo, determinar la transformada $L[e^{at} \operatorname{sen}(bt)]$ de la tabla anterior utilizando únicamente la transformada de la función $\operatorname{sen}(bt)$.

Solución. Como $L[\operatorname{sen} bt] = F(s) = \dfrac{b}{s^2 + b^2}$ para todo $s > 0$, utilizando la propiedad de traslación de $F(s)$ obtenemos:

$$L\left[e^{at} \operatorname{sen} bt\right] = F(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2} \text{ para todo } \ s > a. \ \blacksquare$$

P3) Transformada de Laplace de la derivada. Si $L[f] = F(s)$ existe para para $s > \alpha$, entonces:

$$L[f'] = s\, L[f] - f(0) \quad \text{para} \quad s > \alpha.$$

Ejemplo 3.34. Calcularemos $L[\cos t]$ conociendo la transformada de la función $\operatorname{sen} t$.

Solución. Si $f(t) = \operatorname{sen} t$, entonces $f'(t) = \cos t$, así que:

$$L\,[\underbrace{\cos t}_{f'(t)}] = sL\,[\underbrace{\operatorname{sen} t}_{f(t)}] - f(0) = s\frac{1}{s^2+1} - 0 = \frac{s}{s^2+1} \text{ para todo } s > 0. \ \blacksquare$$

Este resultado puede generalizarse a derivadas de mayor orden:

P4) Transformada de Laplace de derivadas de orden mayor. Si $L[f] = F(s)$ existe para $s > \alpha$, entonces:

$$L\left[f''\right] = s^2\, L[f] - s\, f(0) - f'(0) \ \text{ para todo } s > \alpha$$

y, en general,

$$L\left[f^{(n)}\right] = s^n\, L[f] - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \ \text{ para todo } s > \alpha.$$

Utilizaremos esta propiedad en la resolución de problemas de valor inicial mediante la transformada de Laplace en la sección 3.5.3.

Ejemplo 3.35. Calcula la transformada de Laplace de la derivada de orden 4 de una función $f(t)$ conociendo la transformada $F(s) = L[f(t)]$.

P5) Derivada de la transformada de Laplace. Si $L[f] = F(s)$ existe para $s > \alpha$, entonces:

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad \text{para todo } s > \alpha.$$

⬢ **Ejemplo 3.36.** Calcula $L[t \operatorname{sen} bt]$.

Solución. Sabemos que:

$$L[\operatorname{sen} bt] = F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2} \quad \text{para todo } s > 0,$$

así que derivando $F(s)$, tenemos:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{-2bs}{(b^2 + s^2)^2}.$$

Por tanto, aplicando la derivada de la transformada, obtenemos:

$$L[t \operatorname{sen} bt] = -\frac{dF}{ds} = \frac{2bs}{(b^2 + s^2)^2} \quad \text{para todo } s > 0. \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 3.5.1

1. Calcula, aplicando la definición, la transformada de Laplace de las siguientes funciones, indicando para qué valores de s existen:

   (a) $L[f(t)]$ donde $f(t) = \begin{cases} 2 & si \quad 0 < t < 3 \\ 3t - 1 & si \quad t \geq 3. \end{cases}$

   (b) $L[f(t)]$ donde $f(t) = \begin{cases} -1 & si \quad 0 < t < 1 \\ 3 & si \quad 1 \leq t < 5 \\ t & si \quad t \geq 5. \end{cases}$

   (Solución. (a) $\dfrac{e^{-5s}(s+1)}{s^2} + \dfrac{4e^{-s}}{s} - \dfrac{1}{s}, \; s > 0,$

   (b) $\dfrac{2}{s} + \dfrac{e^{-3s}(6s+3)}{s^2}, \; s > 0$**).**

2. Deduce la fórmula de $L[t^n]$, siendo $n \in \mathbb{N}$. Sugerencia: calcula las transformadas $L[t^2]$, $L[t^3]$ y a partir de ellas deduce la fórmula general.

   (Solución. $\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \; s > 0$**).**

3. Calcula:

   - $L[2te^{-2t} \cos 3t]$. **(Solución.** $\dfrac{2s^2 + 8s - 10}{(s^2 + 4s + 13)^2}$**).**
   - $L[(1 + e^{-t})^2]$. **(Solución.** $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2}{s+1} + \dfrac{1}{s+2}$**).**
   - $L[t \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(4t)]$. **(Solución.** $\dfrac{8(3s^4 + 34s^2 - 225)}{(s^4 + 34s^2 + 225)^2}$**).**

- $L\left[\cos^3 t\right]$. **(Solución.** $\dfrac{s(s^2+7)}{(s^2+1)(s^2+9)}$**).**
- $L\left[3+2e^{-5t}-\dfrac{1}{2}t^2\right]$. **(Solución.** $\dfrac{3}{s}-\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{2}{s+5}$**).**
- $L\left[e^{-t}\,\mathrm{sen}(\sqrt{7}t)+t^3-\dfrac{5}{4}\right]$. **(Solución.** $-\dfrac{5}{4s}+\dfrac{6}{s^4}+\dfrac{\sqrt{7}}{s^2+2s+8}$**).**
- $L\left[4t^2-3+\mathrm{sen}^3 t\right]$. **(Solución.** $\dfrac{8}{s^3}-\dfrac{3}{s}+\dfrac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$**).**
- $L\left[e^{4t}\,\mathrm{sen}\,(-t)\right]$. **(Solución.** $-\dfrac{1}{1+(s-4)^2}$**).**
- Calcula $L\left[t^2\,e^{3t}\right]$. **(Solución.** $\dfrac{2}{(s-3)^3}$**).**

4. Escribe la derivada de orden 5 de la función $f(t)$, es decir, $L\left[f^{(5)}\right]$.
5. Sabiendo que $L\left[t^{\frac{1}{2}}\right]=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$ calcula $L\left[t^{\frac{3}{2}}\right]$ y $L\left[t^{\frac{5}{2}}\right]$.

   (Solución. $\dfrac{3\sqrt{\pi}}{5s^{\frac{5}{2}}}, \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8s^{\frac{7}{2}}}$**).**
6. Sabiendo que $\cosh t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$, calcula $L\left[\cosh t\right]$.

   (Solución. $\dfrac{s}{s^2-1}$**).**

3.5.2. Transformada inversa de Laplace: definición y propiedades.

En esta sección veremos el problema inverso al cálculo de la transformada de Laplace, es decir, estudiaremos cómo encontrar la función $f(t)$ conociendo su transformada $F(s)$. Esto resulta imprescindible en la resolución de EDO lineales con coeficientes constantes, tal como veremos en la sección 3.5.3.

■ **Definición 3.8.** La **transformada inversa de Laplace** de una función $F(s)$ es la función $f(t)$ que cumple:

$$L\left[f(t)\right]=F(s). \tag{3.30}$$

La denotamos $L^{-1}\left[F(s)\right]=f(t)$.

⬢ **Ejemplo 3.37.** Determina $L^{-1}\left[F(s)\right]$ siendo:

(a) $F(s)=\dfrac{2}{s^3}$.

(b) $F(s)=\dfrac{3}{s^2+9}$.

(c) $F(s)=\dfrac{s-1}{s^2-2s+5}$.

(d) $F(s) = \dfrac{7s-1}{s^3-7s-6}$.

Solución. Para calcular $L^{-1}[F(s)]$ consultamos la tabla de la transformada y obtenemos:

(a) $L^{-1}\left[\dfrac{2}{s^3}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{2!}{s^3}\right] = t^2$.

(b) $L^{-1}\left[\dfrac{3}{s^2+9}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{3}{s^2+3^2}\right] = \operatorname{sen}(3t)$.

(c) Puesto que el denominador no tiene raíces reales, podemos escribirlo como suma de cuadrados en la forma $(s-1)^2+2^2$. Tendremos, por tanto, que $L^{-1}\left[\dfrac{s-1}{s^2-2s+5}\right] = L^{-1}\left[\dfrac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\right] = e^t\cos(2t)$.

(d) Como el denominador admite raíces reales, en primer lugar, tenemos que encontrar la descomposición en fracciones simples de $F(s) = \dfrac{7s-1}{s^3-7s-6}$. Como $s^3-7s-6 = (s+1)(s+2)(s-3)$, esto nos lleva a la descomposición:

$$\frac{7s-1}{s^3-7s-6} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-3}$$

donde A, B y C son constantes a determinar. Reducimos a común denominador el término de la derecha e igualamos los numeradores:

$$7s-1 = A(s+2)(s-3) + B(s+1)(s-3) + C(s+1)(s+2).$$

Asignando valores a s (por ejemplo, los valores de las raíces), obtenemos un sistema trivial cuya solución es $A=2$, $B=-3$ y $C=1$. Otra opción para encontrar estos valores es igualando los coeficientes de los polinomios que aparecen en ambos términos. Por tanto,

$$L^{-1}\left[\frac{7s-1}{s^3-7s-6}\right] = L^{-1}\left[\frac{2}{s+1} + \frac{-3}{s+2} + \frac{1}{s-3}\right] =$$

$$2L^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - 3L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] =$$

$$2e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{3t} \text{ para todo } s > 3. \blacksquare$$

Propiedades de la transformada inversa de Laplace

Veamos algunas propiedades de la transformada inversa que nos permiten simplificar su cálculo.

P1) Linealidad. $L^{-1}[aF+bG] = aL^{-1}[F] + bL^{-1}[G]$ para cualesquiera números reales a, b.

Ejemplo 3.38. Calcula $L^{-1}\left[\dfrac{-3}{2s^3}+\dfrac{7}{1+s^2}\right]$.

Solución. Aplicamos la propiedad de la linealidad,

$$L^{-1}\left[\frac{-3}{2s^3}+\frac{7}{1+s^2}\right]=-\frac{3}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{s^3}\right]+7L^{-1}\left[\frac{1}{1+s^2}\right]=-\frac{3t^2}{4}+7\,\mathrm{sen}\,t.\ \blacksquare$$

P2) Transformada de la integral. Si $L\left[f(t)\right]=F(s)$, entonces:

$$L\left[\int_0^t f(u)\,du\right]=\frac{F(s)}{s}, \tag{3.31}$$

o, en forma equivalente,

$$L^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right]=\int_0^t f(u)\,du. \tag{3.32}$$

Ejemplo 3.39. Calcula $L^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right]$.

Solución. Teniendo en cuenta la fórmula (3.32), consideramos:

$$\frac{F(s)}{s}=\frac{1}{s(s^2+4)},$$

luego:

$$F(s)=\frac{1}{s^2+4}=\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}=L^{-1}\left[f\right].$$

Aplicando la linealidad y buscando en la tabla de transformadas tenemos,

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}\right]=\frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{sen}(2t)=f(t).$$

Por tanto,

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+4)}\right]=\int_0^t\frac{1}{2}\mathrm{sen}(2u)\,du=\left[-\frac{1}{4}\cos(2u)\right]_0^t=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos(2t).\ \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 3.5.2

1. Halla $L^{-1}\left[\dfrac{s+2}{s^3}\right]$. **(Solución.** $t+t^2$**)**.
2. Halla $L^{-1}\left[\dfrac{7-3s+2s^2}{s^3}\right]$. **(Solución.** $2-3t+\dfrac{7}{2}t^2$**)**.
3. Halla $L^{-1}\left[\dfrac{2s-1}{s^2+3s}\right]$. **(Solución.** $-\dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{3}e^{-3t}$**)**.
4. Halla $L^{-1}\left[\dfrac{4}{s(s^2+5)}\right]$. **(Solución.** $\dfrac{4}{5}-\dfrac{4}{5}\cos(\sqrt{5}t)$**)**.

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

5. Halla $L^{-1}\left[\dfrac{s(1+e^{-3s})}{s^2+\pi^2}\right]$. **(Solución.** $(1-u(t-3))\cos(\pi t)$**)**.

6. Halla $L^{-1}\left[\dfrac{a}{s^2(s^2+a^2)}\right]$. **(Solución.** $\dfrac{at-\operatorname{sen}(at)}{a^2}$**)**.

7. Halla $L^{-1}\left[\dfrac{5s}{(s+4)^3}\right]$. **(Solución.** $(5t-10t^2)e^{-4t}$**)**.

8. Halla $L^{-1}\left[\dfrac{e^{-s}(s+5)}{(s^3+2s^2+2s)}\right]$.

   (Solución. $\left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{5}{2}e^{1-t}\cos(t-1)-\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}(t-1)\right)u(t-1)$**)**.

9. $L^{-1}\left[\dfrac{3}{(s-1)^{10}}\right]$. **(Solución.** $\dfrac{e^t t^9}{120960}$**)**.

10. $L^{-1}\left[\dfrac{3}{(4s-1)^3}\right]$. **(Solución.** $\dfrac{3e^{\frac{t}{4}}t^2}{128}$**)**.

3.5.3. Resolución de problemas de valor inicial

La resolución de problemas de valor inicial cuya incógnita es $y(t)$ utilizando la tansformada de Laplace se basa en aplicar la transformada sobre toda la ecuación, obteniendo una nueva incógnita $Y(s)$. Haciendo manipulaciones algebraicas, podemos despejar $Y(s)$ y, con el uso de la transformada inversa, recuperamos la función original $y(t)$, obteniendo la solución del problema. Veremos ejemplos en los que las EDO son lineales de coeficientes constantes y los términos independientes pueden ser funciones contínuas o discontínuas. Sin embargo, puede aplicarse esta técnica a algunas EDO lineales con coeficientes variables, a sistemas de EDO e incluso a EDP.

⬢ **Ejemplo 3.40.** Resuelve el problema de valor inicial dado por:

$$y''-y=-t,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

Solución. Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros de la ecuación y por la propiedad de linealidad, obtenemos:

$$L[y'']-L[y]=-L[t].$$

Denotamos por $Y(s)$ a la transformada de la función $y(t)$, es decir, $Y(s)=L[y(t)]$. Utilizando la propiedad de la transformada de la derivada, sabemos que:

$$L[y'']=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$$

y, por tanto,

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-Y(s)=-\frac{1}{s^2}.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales, obtenemos:

$$s^2Y(s) - 1 - Y(s) = -\frac{1}{s^2} \;\to\; (s^2-1)Y(s) = 1 - \frac{1}{s^2} \tag{3.33}$$

Despejando $Y(s)$ de (3.33), resulta:

$$Y(s) = \frac{1-\frac{1}{s^2}}{s^2-1} = \frac{(s^2-1)}{s^2(s^2-1)} = \frac{1}{s^2}.$$

Por tanto,

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t$$

y se tiene que $y(t) = t$ es la solución del problema de valor inicial. ■

■ **Nota 3.14.** En el proceso anterior hemos determinado $y(t)$ utilizando la transformada inversa de la función $Y(s) = 1/s^2$. Pero $y(t) = t$ no es la única cuya transformada inversa de $1/s^2$. Otro ejemplo de transformada inversa de $1/s^2$ sería la función:

$$g(t) = \begin{cases} t & si \quad t \neq 6 \\ 0 & si \quad t = 6. \end{cases}$$

Esto es debido a que la transformada es una integral y las integrales no cambian si modificamos los valores de una función en puntos aislados. La diferencia entre $y(t)$ y $g(t)$ es que $y(t)$ es continua en $[0, +\infty[$ mientras que $g(t)$ no lo es. Siempre que podamos, tomaremos soluciones que sean contínuas. Además, para cada función $F(s)$, existe como máximo una única transformada inversa $f(t)$ que sea contínua.

Método de resolución

Como ya hemos indicado, para resolver un problema de valor inicial seguimos los siguientes pasos:

(1) Tomamos la transformada de Laplace de ambos miembros de la ecuación.

(2) Aplicamos las propiedades de la transformada y las condiciones iniciales para obtener la transformada de Laplace de la solución, y luego despejamos la transformada de esta ecuación.

(3) Determinamos la transformada inversa de la solución buscando en la tabla o utilizando un método apropiado en combinación con la tabla.

⬢ **Ejemplo 3.41.** Resuelve el problema de valor inicial:

$$y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 12.$$

ISBN: 978-84-17429-33-1
Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Solución. Aplicamos la transformada en ambos miembros de la igualdad:

$$L\left[y'' - 2y' + 5y\right] = L\left[-8e^{-t}\right].$$

Utilizando la linealidad de L y la transformada de la función exponencial tenemos:

$$L\left[y''\right] - 2L\left[y'\right] + 5L\left[y\right] = -\frac{8}{s+1}. \qquad (3.34)$$

Si $L\left[y\right] = Y(s)$, sabemos que:

$$\begin{aligned}
&L\left[y'\right] = s\,Y(s) - y(0) = s\,Y(s) - 2,\\
&L\left[y''\right] = s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2\,Y(s) - 2s - 12.
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.34) y despejando $Y(s)$, resulta:

$$\begin{aligned}
&s^2Y(s) - 2s - 12 - 2\left(sY(s) - 2\right) + 5Y(s) = -\frac{8}{s+1} \rightarrow\\
&(s^2 - 2s + 5)Y(s) = 2s + 8 - \frac{8}{s+1} \rightarrow\\
&Y(s) = \frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)}.
\end{aligned}$$

Queda por calcular la transformada inversa de la función $Y(s)$. Teniendo en cuenta que la descomposición en fracciones simples del cociente de polinomios es:

$$\frac{2s^2 + 10s}{(s^2 - 2s + 5)(s+1)} = -\frac{1}{s+1} + \frac{3s+5}{s^2 - 2s + 5},$$

obtenemos, utilizando la tabla para cada uno de ellos, que la solución del problema de valor inicial es:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = 3e^t \cos 2t + 4e^t \operatorname{sen} 2t - e^{-t}. \ \blacksquare$$

■ **Nota 3.15.** Observamos que utilizando la transformada de Laplace se puede reemplazar "diferenciación con respecto a t" con "multiplicación por s", convirtiendo una ecuación diferencial en una ecuación algebraica.

Problemas y cuestiones de la sección 3.5.3

1. Resuelve el problema de valor inicial $y' - 2y = 2t + 1$, $y(0) = 1$. **(Solución.** $-t - 1 + 2e^{2t}$**)**.
2. Resuelve el problema de valor inicial $y'' + 2y' + y = t + e^t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. **(Solución.** $-2 + t + \frac{7}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{5}{2}te^{-t}$**)**.
3. Resuelve el problema de valor inicial $y'' + 4y' - 5y = t\,e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. **(Solución.** $\frac{35}{216}e^{-5t} + \frac{181}{216}e^t - \frac{1}{36}t\,e^t + \frac{1}{12}t^2\,e^t$**)**.
4. Encuentra la función $y(t)$ que cumple $y'' - 3y' + 2y = 2\operatorname{sen} t - 6\cos t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$. **(Solución.** $e^t + e^{2t} + 2\operatorname{sen} t$**)**.

5. Dada la EDO $y'' + 6y' + 9y = g(t)$,
   (a) Halla la solución general cuando $g(t) = 0$.
   (b) Resuelve el problema de valor inicial cuando $g(t) = e^{-3t}$ que cumple $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
   (c) Halla la solución general de la ecuación completa.

   (Solución. (a) $y(t) = C_1e^{-3t} + C_2te^{-3t}$, (b) $y(t) = \frac{1}{2}t^2e^{-3t}$, (c) $y(t) = C_1e^{-3t} + C_2te^{-3t} + \frac{1}{2}t^2e^{-3t}$**)**.

3.5.4. Transformada de Laplace de funciones especiales

En esta sección estudiaremos funciones especiales con discontinuidades que aparecen en ciertos problemas de ingeniería:

- función escalón o de Heaviside,
- función delta de Dirac.

Función escalón unitario (o función de Heaviside)

Dado $a \geq 0$, se define la **función escalón unitario** $u(t-a)$ (también denominada función de Heaviside) como:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si} \quad t \geq a. \end{cases}$$

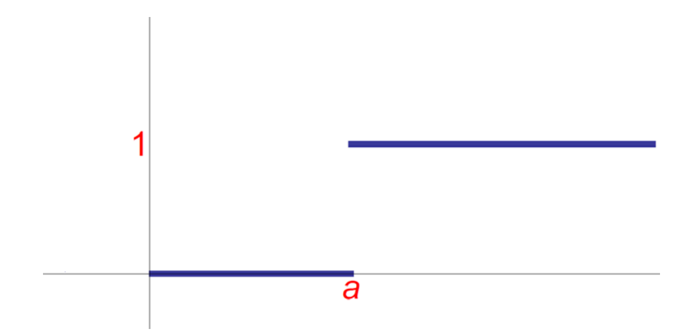


Figura 3.5: Función de Heaviside en $t = a$.

Si queremos modificar el salto que tiene esta función en $t = a$, multiplicamos por una constante M:

$$M\,u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < a \\ M & \text{si} \quad t \geq a. \end{cases} \tag{3.35}$$

Muchas funciones discontinuas pueden expresarse en términos de funciones escalón unitario, lo que nos permite simplificar el cálculo de su transformada de Laplace.

Ejemplo 3.42. Escribe la función a trozos:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi \\ 5 & \text{si} \quad t \geq \pi. \end{cases}$$

en términos de la función escalón.

Solución. Tendremos que:

$$f(t) = 2 + \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < \pi \\ 3 & \text{si} \quad t \geq \pi. \end{cases}$$

y, por tanto, $f(t) = 2 + 3u(t - \pi)$. ■

Introducimos ahora la llamada propiedad de desplazamiento. Esta propiedad describe el efecto sobre la transformada inversa cuando multiplicamos una función por e^{-as}. Estos desplazamientos surgen, por ejemplo, cuando hay tiempos de retraso en la alimentación de energía a sistemas eléctricos (la alimentación ocurre en el tiempo $t = a > 0$). El factor e^{-as} se denomina **factor de retardo**.

P3) Propiedad de desplazamiento. Si $F(s) = L\left[f(t)\right]$ existe para $s > \alpha$, entonces:

$$L\left[u(t-a)\, f(t-a)\right] = e^{-as}\, F(s) \quad \text{para todo } s > a + \alpha \tag{3.36}$$

o bien, en términos de la transformada inversa,

$$L^{-1}\left[e^{-as} F(s)\right] = u(t-a)\, f(t-a). \tag{3.37}$$

Ejemplo 3.43. Calcula $L^{-1}\left[\dfrac{e^{-6s}}{s^2+9}\right]$.

Solución. Tendremos que:

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-6s}}{s^2+9}\right] = L^{-1}[e^{-6s}F(s)] = u(t-6)f(t-6).$$

donde $F(s) = \dfrac{1}{s^2+9}$. Como:

$$L^{-1}\left[F(s)\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t) = f(t),$$

obtenemos:

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-6s}}{s^2+9}\right] = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3t-18)u(t-6). \quad ■$$

Para seguir con la tabla que hicimos al principio de la sección, calculamos la transformada de Laplace de la función escalón.

Ejemplo 3.44. Calcula la transformada de Laplace de $u(t-a)$ con $a \geq 0$.

Solución. Tendremos que:

$$L\left[u(t-a)\right] = \frac{e^{-as}}{s}, \tag{3.38}$$

ya que para $s > 0$,

$$\begin{aligned} L\left[u(t-a)\right] &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\, u(t-a)\, dt = \int_0^a e^{-st}\, 0\, dt + \int_a^{+\infty} e^{-st}\, dt \\ &= \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^{+\infty} = \frac{e^{-as}}{s}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.45. Calcula la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad 0 \leq t < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 \leq t < 5 \\ 7 & \text{si} \quad t \geq 5. \end{cases}$$

Solución. Una posibilidad es utilizar directamente la definición de la transformada de Laplace. Sin embargo, ahorraremos cálculos expresando $f(t)$ en términos de funciones escalón unitario y aplicando después la fórmula (3.38). Analizamos el comportamiento de la función:

- La función $f(t)$ es igual a 3 hasta que t alcanza el valor 2.
- Cuando t llega a $t = 2$ da un salto al -1. Este salto de -4 unidades se puede expresar como $-4\,u(t-2)$ ya que $u(t-2)$ vale 0 hasta que t alcanza el valor 2, después del cual tiene el valor -1.
- En $t = 5$ la función $f(t)$ salta de -1 a 7, es decir, da un salto de 8 unidades. Esto se puede expresar como $8\,u(t-5)$.

Por tanto,

$$f(t) = 3 - 4\,u(t-2) + 8\,u(t-5).$$

Tomando la transformada de Laplace y aplicando la fórmula (3.38), obtenemos:

$$L\left[f\right] = 3L\left[1\right] - 4L\left[u(t-2)\right] + 8L\left[u(t-5)\right] = \frac{3}{s} - \frac{4e^{-2s}}{s} + \frac{8e^{-5s}}{s}. \ \blacksquare$$

Veamos ahora un ejemplo de como resolver un problema de valor inicial donde aparecen funciones escalón.

Ejemplo 3.46. Resuelve la EDO:

$$y'' - 4y' + 8y = 2u(t-3)e^{3(t-3)}$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Solución. Aplicamos la transformada en ambos miembros de la igualdad:

$$L\left[y'' - 4y' + 8y\right] = L\left[2u(t-3)e^{3(t-3)}\right].$$

Utilizando la linealidad de L y la propiedad de desplazamiento para calcular la transformada de la derecha (donde $f(t-3) = e^{3(t-3)} \to f(t) = e^{3t} \to F(s) = \frac{1}{s-3}$), obtendremos:

$$L\left[y''\right] - 4L\left[y'\right] + 8L\left[y\right] = 2\frac{e^{-3s}}{s-3}. \tag{3.39}$$

Si $L\left[y\right] = Y(s)$, sabemos que:

$$\begin{aligned} L\left[y'\right] &= s\,Y(s) - y(0) = s\,Y(s) - 1, \\ L\left[y''\right] &= s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2\,Y(s) - s - 3. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.39) y despejando $Y(s)$, resulta:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - s - 3 - 4\left(sY(s) - 1\right) + 8Y(s) = 2\frac{e^{-3s}}{s-3} &\to \\ (s^2 - 4s + 8)Y(s) = s - 1 + 2\frac{e^{-3s}}{s-3} &\to \\ Y(s) = \frac{s-1}{s^2-4s+8} + \frac{2}{(s-3)(s^2-4s+8)}e^{-3s}&. \end{aligned}$$

Si al despejar $Y(s)$, queda una parte con una exponencial que dependa de s y otra parte sin exponencial, conviene dejar separadas ambas expresiones para calcular la transformada inversa. Denotando:

$$Y_1(s) = \frac{s-1}{s^2-4s+8} \quad \text{e} \quad Y_2(s) = \frac{2}{(s-3)(s^2-4s+8)}e^{-3s},$$

calcularemos cada una de sus transformadas inversas. Puesto que $s^2 - 4s + 8$ no tiene raíces reales, tendremos:

$$\begin{aligned} y_1(t) = L^{-1}\left[Y_1(s)\right] = L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-4s+8}\right] = L^{-1}\left[\frac{s-2+1}{(s-2)^2+2^2}\right] &= \\ L^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+2^2}\right] + \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{2}{(s-2)^2+2^2}\right] &= \\ e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{2t}\operatorname{sen}(2t)&. \end{aligned}$$

Para calcular $y_2(t) = L^{-1}\left[Y_2(s)\right]$, utilizaremos la propiedad de desplazamiento. Denotando por:

$$F(s) = \frac{2}{(s-3)(s^2-4s+8)},$$

tendremos que:

$$y_2(t) = L^{-1}\left[e^{-3s}F(s)\right] = u(t-3)f(t-3)$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

donde $f(t) = L^{-1}[F(s)]$. Hacemos el cálculo correspondiente:

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{2}{(s-3)(s^2-4s+8)}\right] = L^{-1}\left[\frac{2}{5}\,\frac{1}{s-3} - \frac{2}{5}\,\frac{s-1}{s^2-4s+8}\right] =$$

$$\frac{2}{5}L^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - \frac{2}{5}\,L^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+2^2}\right] - \frac{2}{10}\,L^{-1}\left[\frac{2}{(s-2)^2+2^2}\right] =$$

$$\frac{2}{5}e^{3t} - \frac{2}{5}e^{2t}\cos(2t) - \frac{1}{5}e^{2t}\operatorname{sen}(2t).$$

Por tanto, la solución será:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = y_1(t) + y_2(t) = e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{2t}\operatorname{sen}(2t) +$$

$$\frac{2}{5}u(t-3)\left(e^{3(t-3)} - e^{2(t-3)}\cos(2(t-3)) - \frac{1}{2}e^{2(t-3)}\operatorname{sen}(2(t-3))\right).$$

Si queremos escribir la función a trozos, será:

$$y(t) = \begin{cases} e^{2t}\left(\cos(2t) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)\right) & \text{si} \quad 0 \le t < 3 \\ e^{2t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{2t}\operatorname{sen}(2t) + \frac{2}{5}e^{3(t-3)} & \\ -\frac{2}{5}e^{2(t-3)}(\cos(2(t-3)) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2(t-3)) & \text{si} \quad t \ge 3. \end{cases} \quad \blacksquare$$

La función delta de Dirac

En ciertos fenómenos como pueden ser los sistemas mecánicos, circuitos eléctricos y deflexión de vigas, aparecen funciones que tienen un valor muy grande en un intervalo de tiempo muy corto. Por ejemplo, el golpe de un martillo ejerce una fuerza relativamente grande durante un intervalo de tiempo relativamente corto, y una carga pesada concentrada en un punto de una viga suspendida ejerce una fuerza grande sobre una pequeña sección de la viga. Una pelota puede lanzarse hacia arriba con un golpe violento dado con algún tipo de palo. Si estudiamos la EDO que modeliza un sistema mecánico sometido a una fuerza de estas características, podremos conocer la respuesta del sistema ante dicha fuerza. Para tratar con estas fuerzas, se utiliza la llamada función delta de Dirac.

■ **Definición 3.9.** La función **delta de Dirac** $\delta(t)$ se caracteriza por las dos propiedades siguientes:

(1) Se tiene que:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \neq 0 \\ +\infty & si \quad t = 0 \end{cases} \tag{3.40}$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

(2) Y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0) \tag{3.41}$$

para cualquier $f(t)$ contínua.

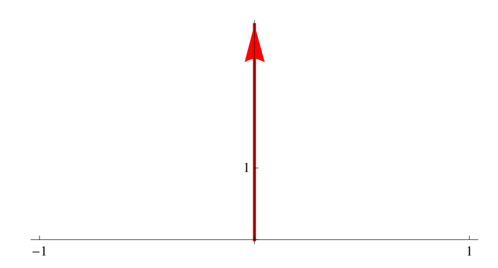


Figura 3.6: Función delta de Dirac.

Desplazando el argumento de $\delta(t)$ tenemos que $\delta(t-a) = 0$ si $t \neq a$ y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-a)\,dt = f(a) \tag{3.42}$$

para cualquier función $f(t)$ contínua.

Calculamos a continuación su transformada de Laplace.

⬣ **Ejemplo 3.47.** Calcula la transformada de Laplace de la función $\delta(t-a)$ con $a \geq 0$.

Solución. Utilizando la (3.42) para $f(t) = e^{-st}$ y teniendo en cuenta que $\delta(t-a) = 0$ para $t \neq a$, tendremos que para $a \geq 0$:

$$L\left[\delta(t-a)\right] = \int_{0}^{+\infty} e^{-st}\delta(t-a)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}\delta(t-a)\,dt = e^{-as}.$$

Por tanto, para $a \geq 0$,

$$L\left[\delta(t-a)\right] = e^{-as}. \quad \blacksquare$$

Para resolver problemas de valor inicial donde aparece la función delta de Dirac, se procede de manera análoga al caso en que aparecen funciones escalón.

⬣ **Ejemplo 3.48.** Resuelve la EDO:

$$y'' + 9y = \delta(t-1)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Solución. Aplicamos la transformada en ambos miembros de la igualdad y operamos:

$$L[y'' + 9y'] = L[\delta(t-1)].$$

Tendremos también:

$$L[y''] + 9L[y] = e^{-s}. \tag{3.43}$$

Si $L[y] = Y(s)$, sabemos que:

$$\begin{aligned} L[y'] &= s\,Y(s) - y(0) = s\,Y(s), \\ L[y''] &= s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0) = s^2\,Y(s) - 1. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.43) y despejando $Y(s)$, resulta:

$$s^2Y(s) - 1 + 9Y(s) = e^{-s} \to (s^2+9)Y(s) = 1 + e^{-s} \to$$
$$Y(s) = \frac{1}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+9}\; e^{-s}.$$

Mantenemos separada la parte con exponencial y obtendremos:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right] + \frac{1}{3}L^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\; e^{-s}\right] =$$
$$\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3t) + \frac{1}{3}u(t-1)\,\mathrm{sen}(3(t-3)).$$

Si queremos escribir la función a trozos, será:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3t) & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ \\ \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3t) + \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(3(t-1)) & \text{si} \quad t \ge 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 3.5.4

1. Calcula la transformada de Laplace de la función $f(t)$ utilizando la función escalón:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le t < 2 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \le t < 3 \\ e^{7t} & \text{si} \quad t \ge 3 \end{cases}$$

(Solución. $\dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-2s}}{s} + \dfrac{e^{21-3s}}{s-7}$**).**

2. Resuelve el problema de valor inicial $y'' + 2y' + 3y = \delta(t-\pi)$ con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(Solución. $y(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t) - \dfrac{e^{\pi-t}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}(\pi-t))u(t-\pi)$**).**

3. Resuelve el problema de valor inicial $y'' - 3y' + 2y = e^{t-3}u(t-3)$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(Solución. $y(t) = 2e^t - e^{2t} + u(t-3)\left(e^{2t-6} + (2-t)e^{t-3}\right)$**).**

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

4. Resuelve el problema de valor inicial $y''+2y'+y = u(t-1)-u(t-2)$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Escribe la solución como una función a trozos.
   (Solución.

$$f(t) = \begin{cases} (t+1)e^{-t} & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ (t+1)e^{-t} + 1 - te^{1-t} & \text{si} \quad 1 \leq t < 2 \\ (t+1)e^{-t} + 2 - te^{1-t} + (1-t)e^{2-t} & \text{si} \quad t \geq 2 \end{cases}$$ **).**

5. La corriente $I(t)$ de un circuito RLC en serie está regido por el problema de valor inicial:

$$I'' - 4I = f(t), \; I(0) = 0, \; I'(0) = 0$$

   siendo $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < 2 \\ 5 & \text{si} \quad t \geq 2 \end{cases}$. Determina la corriente en función del tiempo.
   (Solución.

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t < 2 \\ \frac{5}{8}e^{4-2t} + \frac{5}{8}e^{2t-4} & \text{si} \quad t \geq 2 \end{cases}$$ **).**

6. Una masa sujeta a un resorte se suelta del reposo 1 m. por debajo de la posición de equilibrio del sistema masa-resorte y empieza a vibrar. Después de $\pi/2$ segundos, la masa es golpeada por un martillo que ejerce un impulso sobre la masa. El sistema está regido por el problema de valor inicial:

$$x'' + x = -3\,\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right); \quad x(0) = 1, \; x'(0) = 0.$$

   Calcula el desplazamiento $x(t)$ con respecto al equilibrio en el instante t y explica qué le sucede a la masa después de ser golpeada.
   (Solución. $x(t) = \cos t + 3\cos t \; u(t - \frac{\pi}{2})$**).**

3.6. Proyecto para el capítulo 3. Ecuaciones de Cauchy-Euler

Una clase especial de ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes variables que sabemos resolver son las ecuaciones de Cauchy-Euler, que son aquellas que pueden escribirse de la forma:

$$a\,x^2\,\frac{d^2y}{dx} + b\,x\,\frac{dy}{dx} + c\,y = g(x) \qquad (3.44)$$

donde a, b y c son constantes. Este tipo de ecuaciones se resuelven haciendo el cambio $x = e^t$ que transforma la ecuación (3.44) en una ecuación con coeficientes constantes. También pueden resolverse suponiendo que

la solución es de la forma $y(x) = x^r$, lo que conduce a una ecuación auxiliar en r. Veamos ambos métodos.

Método 1. Hacemos el cambio de variables:

$$(x, y) \longrightarrow (t, y)$$

definido por $x = e^t > 0$. Tendremos que $\dfrac{dx}{dt} = e^t$ y por la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t.$$

Despejamos:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

y volvemos a derivar, aplicando de nuevo la regla de la cadena:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^t\frac{dy}{dx}\right) = e^t\frac{dy}{dx} + e^t\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} =$$
$$= e^t\frac{dy}{dx} + e^{2t}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dt} + e^{2t}\frac{d^2y}{dx^2}$$

y despejamos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}.$$

Sustituyendo $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en la ecuación (3.44), llegamos a la ecuación lineal de coeficientes constantes:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = g(e^t). \qquad (3.45)$$

Esta ecuación ya se puede resolver por los métodos conocidos obteniendo $y(t)$. Posteriormente, deshacemos el cambio para tener $y(x)$.

Si nos interesan soluciones para $x < 0$, hacemos el cambio de variable $x = -\xi$ y resolvemos la ecuación para $\xi > 0$.

Método 2. En primer lugar, resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0.$$

Consideramos soluciones de la forma $y = x^r$, con r a determinar. Al sustituir obtenemos:

$$a\,x^2\,r\,(r-1)\,x^{r-2} + b\,x\,r\,x^{r-1} + c\,x^r = 0$$

y podemos sacar factor común x^r:

$$x^r\,(a\,r\,(r-1) + b\,r + c) = 0.$$

Puesto que $x^r > 0$, para que se verifique la ecuación se tendrá que cumplir:

$$ar(r-1) + br + c = 0. \tag{3.46}$$

La ecuación (3.46) es una ecuación auxiliar de la ecuación de Cauchy-Euler, llamada **ecuación indicial**.

Veamos qué soluciones obtenemos en función de las raíces de la ecuación indicial:

1. Si las raíces son r_1 y r_2, reales y distintas, entonces dos soluciones linealmente independientes son $y_1(x) = x^{r_1}$ e $y_2(x) = x^{r_2}$. Por tanto, la solución de esta ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}.$$

2. Si la ecuación auxiliar tiene una raíz doble r, entonces una solución es $y_1(x) = x^r$. Mediante el método de reducción de orden (ver anexo 3.7.1), obtenemos una segunda solución linealmente independiente dada por $y_2(x) = x^r \ln x$. En este caso, la solución de la ecuación homogénea será:

$$y_h(x) = C_1 x + C_2 x^r \ln x.$$

3. Si las raíces son complejas conjugadas, $r = \alpha \pm \beta i$, la solución de la ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + C_2 x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x), \quad x > 0.$$

Para $x < 0$, hacemos el cambio de variable $x = -\xi$ y resolvemos la ecuación para $\xi > 0$.

La solución particular se puede calcular por el método de variación de parámetros.

⬢ **Ejemplo 3.49.** Resuelve la EDO de Cauchy-Euler dada por:

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = x$$

en $]0, +\infty[$ mediante los dos métodos estudiados.

Solución. 1) Para esta ecuación, se tiene que $a = 1$, $b = 2$, $c = -2$. Por tanto, el cambio $x = e^t$, nos lleva a la ecuación de coeficientes constantes dada por (3.45):

$$y'' + y' - 2y = e^t.$$

Su ecuación auxiliar es $r^2 + r - 2 = 0$, con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$. Luego la solución general de la parte homogénea es:

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}.$$

Para hallar la solución particular, aplicamos el método de los coeficientes indeterminados, suponiendo que ésta es de la forma:

$$y_p(t) = t^h A e^t$$

siendo h el orden de multiplicidad de 1 en la ecuación auxiliar; en este caso $h = 1$. Por tanto:

$$y_p(t) = tAe^t, \quad y_p'(t) = Ae^t + Ate^t, \quad y_p''(t) = 2Ae^t + Ate^t$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos que $3A = 1$, es decir, $A = 1/3$. Por tanto:

$$y_p(t) = \frac{1}{3} t e^t$$

y la solución general es:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{3} t e^t.$$

Deshaciendo el cambio inicial $x = e^t$, obtenemos:

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^{-2} + \frac{1}{3} x \ln x, \quad x > 0.$$

2) Para aplicar el segundo método, suponemos que las soluciones son de la forma x^r. Derivando y sustituyendo llegamos también a la ecuación auxiliar $r(r-1) + 2r - 2 = 0$ con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$, obteniendo la solución general de la parte homogénea:

$$y_h(x) = C_1 x + C_2 x^{-2}.$$

Para hallar la solución particular tenemos que aplicar el método de variación de parámetros. Para ello, escribimos la ecuación en forma canónica:

$$y'' + \frac{2}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = \frac{1}{x}.$$

Con este método, tomamos la solución particular de la forma:

$$y_p(x) = v_1(x) x + v_2(x) x^{-2}$$

con v_1 y v_2 funciones a determinar. Estas funciones vienen dadas por:

$$v_1(x) = \int \frac{-x^{-2}\frac{1}{x}}{W[x, x^{-2}]} dx = \int \frac{-x^{-3}}{-3x^{-2}} dx = \int \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} \ln|x|,$$

$$v_2(x) = \int \frac{x\frac{1}{x}}{W[x, x^{-2}]} dx = \int \frac{1}{-3x^{-2}} dx = \int \frac{-1}{3} x^2 dx = \frac{-x^3}{9}.$$

Por tanto:

$$y_p(x) = \frac{1}{3} x \ln|x| - \frac{x^3}{9} x^{-2} = \frac{1}{3} x \ln|x| - \frac{x}{9}$$

y la solución general es:

$$y(x) = Cx + C_2 x^{-2} + \frac{1}{3} x \ln|x| - \frac{x}{9} = C_1 x + C_2 x^{-2} + \frac{1}{3} x \ln|x|, \ x > 0. \ \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 3.2

1. Resuelve el problema de valor inicial $2x^2y'' - 3xy' + 3y = \frac{2}{x}$ con las condiciones iniciales $y(1) = \frac{1}{5}$, $y'(1) = \frac{4}{5}$.

   (Solución. $y(x) = \frac{1}{5x} - 2x + 2x^{3/2}$**).**

3.7. Anexos

3.7.1. Método de reducción del orden

Si trabajamos con una EDO lineal homogénea de segundo orden, el método de reducción del orden nos permite obtener una segunda solución a partir de una solución conocida.

Sea $f(x)$ una solución conocida de la ecuación:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.47}$$

Este método consiste en suponer que la otra solución es de la forma:

$$y(x) = v(x)\, f(x).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación, ésta se reduce a una ecuación de primer orden separable en la variable $w = v'$. Una vez obtenida $v'(x)$, se integra y se obtiene $v(x)$ así:

$$v(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{(f(x))^2} dx.$$

Si buscamos un conjunto fundamental de soluciones, elegiremos las constantes de integración de modo que $f(x)$ y $v(x)$ sean linealmente independientes.

⬣ **Ejemplo 3.50.** La función $f(x) = e^x$ es solución de la EDO $y'' - 2y' + y = 0$. Encuentra una segunda solución linealmente independiente.

Solución. Si la nueva solución es $y(x) = v(x)\, f(x) = v(x)\, e^x$, entonces:

$$\begin{aligned} y' &= v\, e^x + v'\, e^x \\ y'' &= v\, e^x + 2v'\, e^x + v''\, e^x. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$v\, e^x + 2v'\, e^x + v''\, e^x - 2(v\, e^x + v'\, e^x) + v\, e^x = 0$$

y simplificando:

$$v'' = 0.$$

Sea $w = v'$, entonces:

$$w' = 0, \text{ por tanto, } w(x) = C_1, \; v'(x) = C_1 \text{ y } v(x) = C_1 x + C_2,$$

de donde tenemos que la solución buscada es de la forma:

$$y(x) = (C_1 x + C_2)\, e^x.$$

Puesto que la solución ha de ser linealmente independiente con $f(x) = e^x$, tomamos $C_1 \neq 0$. Así, tomando por ejemplo $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, una segunda solución linealmente independiente puede ser:

$$y(x) = x\, e^x. \;\blacksquare$$

⬣ **Ejemplo 3.51.** Dada la función $f(x) = x$ solución de la ecuación diferencial $y'' - 2xy' + 2y = 0$, hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Solución. Sea $y(x) = v(x)\, f(x) = v(x)\, x$ la nueva solución, con $v(x)$ a determinar. Entonces:

$$\begin{aligned} y' &= v + v'x \\ y'' &= 2v' + v''\, x. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$2v' + v''\, x - 2x(v + v'x) + 2v\, x = 0$$

y simplificando:

$$xv'' + (2 - 2x^2)v' = 0.$$

Sea $w = v'$, entonces:

$$xw' + (2 - 2x^2)w = 0.$$

Resolvemos ahora esta ecuación de primer orden. Separando las variables, tenemos:

$$\frac{dw}{w} = \frac{2x^2 - 2}{x} dx,$$

integramos ambos lados,

$$\ln|w| = x^2 - 2\ln|x| + C_1$$

y al despejar w obtenemos:

$$w = C\frac{e^{x^2}}{x^2}.$$

Por tanto:

$$v' = C\frac{e^{x^2}}{x^2},$$

de donde tendremos:

$$v(x) = C \int \frac{e^{x^2}}{x^2} dx.$$

Puesto que esta integral no se puede hallar en términos de funciones elementales, podemos expresar $y(x)$ en términos de una integral definida:

$$y(x) = x \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$$

y aproximar los valores de $y(x)$ mediante un método numérico. Otra opción sería obtener un desarrollo en series de potencias del integrando.
■

3.7.2. Sistema fundamental de soluciones. Raíces complejas

Veamos que si las raíces de la ecuación característica son $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\{e^{\alpha x} \cos(\beta x), e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x)\}$$

es un sistema fundamental de soluciones de la EDO.

Siguiendo el razonamiento visto para las raíces reales tenemos como soluciones $e^{r_1 x}$ y $e^{r_2 x}$. Tomemos $e^{r_1 x}$ (tomando $e^{r_2 x}$ llegaríamos a las mismas conclusiones). Utilizando la fórmula de Euler se tiene:

$$e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i \operatorname{sen}(\beta x))$$

y obtenemos una solución compleja:

$$z(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x).$$

A partir de ella es sencillo obtener dos soluciones reales de la EDO teniendo en cuenta el lema siguiente:

■ **Lema 3.1.** Si $z(x) = u(x) + iv(x)$ es solución de la ecuación homogénea:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.48}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces, $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones reales de dicha ecuación.

Demostración. Si $z(x)$ es solución, entonces:

$$az'' + bz' + cz = 0.$$

Sustituimos $z(x)$ junto con sus derivadas en la ecuación (3.48):

$$a(u'' + iv'') + b(u' + iv') + c(u + iv) = 0,$$

agrupamos términos:

$$(au'' + bu' + cu) + i(av'' + bv' + cv) = 0$$

e igualando la parte real y la parte imaginaria a 0, se tiene:

$$au'' + bu' + cu = 0, \quad av'' + bv' + cv = 0;$$

por tanto, $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones reales de la ecuación diferencial. ■

3.7.3. Vibraciones forzadas

En esta sección estudiamos las vibraciones de un sistema masa-resorte cuando se aplica una fuerza externa $f(t)$. Es de particular interés la respuesta del sistema a un término de forzamiento periódico. Tomemos como ejemplo una función de forzamiento cosenoidal:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\gamma t)$$

donde F_0 y γ son constantes no negativas. Dependiendo de las raíces del polinomio característico, obtenemos un tipo de movimiento.

1. **Movimiento subamortiguado.** Se tiene que $b^2 < 4mk$ y la solución de la EDO homogénea asociada puede escribirse en la forma:

$$x_h(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi\right). \tag{3.49}$$

Hallemos ahora una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados. Como $\pm\gamma i$ no es raíz de la ecuación auxiliar, esta solución será de la forma:

$$x_p(t) = A_1 \cos(\gamma t) + A_2 \operatorname{sen}(\gamma t),$$

con A_1 y A_2 constantes a determinar. Para ello, derivamos dos veces,

$$x'(t) = -\gamma A_1 \operatorname{sen}(\gamma t) + \gamma A_2 \cos(\gamma t),$$
$$x''(t) = -\gamma^2 A_1 \cos(\gamma t) - \gamma^2 A_2 \operatorname{sen}(\gamma t)$$

y sustituimos en la ecuación diferencial,

$$(k - \gamma^2 m)\left(A_1 \cos(\gamma t) + A_2 \operatorname{sen}(\gamma t)\right) + \gamma b\left(-A_1 \operatorname{sen}(\gamma t) + A_2 \cos(\gamma t)\right) = F_0 \cos(\gamma t).$$

Igualando términos, llegamos a un sistema con incógnitas A_1 y A_2:

$$\left.\begin{array}{rcl} (k-\gamma^2 m)A_1 + \gamma b A_2 & = & F_0 \\ -\gamma b A_1 + k - \gamma^2 m)A_2 & = & 0. \end{array}\right\}$$

de donde obtenemos:

$$A_1 = \frac{F_0(k-\gamma^2 m)}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{F_0\gamma b}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}.$$

Por tanto, una solución particular viene dada por:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}\big((k-\gamma^2 m)t\cos(\gamma t) + b\gamma \operatorname{sen}(\gamma t)\big)$$

que puede escribirse en la forma:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}} \operatorname{sen}(\gamma t + \theta), \tag{3.50}$$

donde θ es un ángulo definido por $\tan\theta = \frac{k-\gamma^2 m}{b\gamma}$. Combinando la solución homogénea (3.49) y la solución particular (3.50) llegamos a la solución general:

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t+\phi\right)+\frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2+b^2\gamma^2}}\,\mathrm{sen}(\gamma t+\theta).$$

El primer sumando de esta expresión se denomina **término transitorio**, representa una oscilación amortiguada y sólo depende de los parámetros del sistema y de las condiciones iniciales, que tienden a cero cuando t tiende a $+\infty$, debido al factor de amortiguación $e^{-\frac{b}{2m}t}$.

El segundo sumando es el **término estacionario**, que resulta ser una función senoidal con frecuencia angular γ.

El término estacionario se encuentra desfasado con respecto a la fuerza externa $f(t) = \cos\gamma t$ por el ángulo $\theta - \frac{\pi}{2}$:

$$\mathrm{sen}\,(\gamma t+\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\gamma t+\theta)\right) =$$
$$\cos\left(\gamma t-\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\left(\gamma t-(\frac{\pi}{2}-\theta)\right).$$

A medida que el término transitorio va desapareciendo, el movimiento del sistema masa-resorte llega a ser esencialmente representado por el segundo término $x_p(t)$. El factor:

$$\frac{1}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2+b^2\gamma^2}}$$

llamado **factor de ganancia**, es lo que se gana en amplitud.

■ **Nota 3.16.** Podemos observar que si b es muy pequeño y el valor de γ es próximo a $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, el movimiento es ligeramente amortiguado y la frecuencia impresa, $\dfrac{\gamma}{2\pi}$, es cercana a la frecuencia natural. En este caso, la amplitud es muy grande y se produce el fenómeno conocido como **resonancia**.

2. **Ausencia de amortiguación.** La ecuación que describe el movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx = F_0\cos(\gamma t).$$

La solución de la parte homogénea viene dada por (3.24), obtenida en el primer caso estudiado.

Dependiendo de si γ es solución o no del polinomio característico obtenemos dos posibilidades para la solución particular:

- Si $\gamma \neq \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, una solución particular viene dada por:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(k-\gamma^2 m)}\,\mathrm{sen}(\gamma t+\theta).$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

- Si $\gamma = \omega$, entonces:

$$x_p(t) = A_1 t \cos(\gamma t) + A_2 t \operatorname{sen}(\gamma t)$$

con A_1 y A_2 a determinar. Aplicando el método de coeficientes indeterminados, llegamos a:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega} t \operatorname{sen}(\gamma t).$$

En el segundo caso, es decir, si $\gamma = \omega$, la solución general es:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{2m\omega} t \operatorname{sen}(\gamma t).$$

Por el segundo sumando, vemos que las oscilaciones se volverían infinitas, el sistema se rompería y la ecuación dejaría de ser aplicable. La aplicación de una fuerza periódica de frecuencia cercana o igual a la frecuencia de las oscilaciones libres no amortiguadas puede causar un serio problema en cualquier sistema mecánico oscilatorio.

Ejemplo 3.52. Resuelve el problema de valor inicial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen}(\gamma t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

con F_0 constante.

Solución. Como hemos visto, la solución de la ecuación homogénea es:

$$x_h(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega t).$$

Una solución particular para $\omega \neq \gamma$, calculada por el método de los coeficientes indeterminados, resulta:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}(\gamma t)$$

y la solución general que se obtiene es:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen}(\gamma t).$$

Sustituyendo las condiciones iniciales obtenemos:

$$C_1 = 0 \quad \text{y} \quad C_2 = -\gamma \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}.$$

La solución del problema de valor inicial es:

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} \left(-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen}(\gamma t)\right), \quad \omega \neq \gamma.$$

Aunque esta ecuación no está definida para $\omega = \gamma$, es interesante observar el caso límite cuando γ tiende a ω. Este proceso límite es análogo a sintonizar la frecuencia de la fuerza impulsora, $\dfrac{\gamma}{2\pi}$, con la frecuencia de las oscilaciones libres, $\dfrac{\omega}{2\pi}$. Para $\omega = \gamma$ definimos la solución como un límite que resolvemos por la regla de L'Hôpital:

$$x(t) = \lim_{\gamma \to \omega} F_0 \frac{\gamma \operatorname{sen}(\omega t) + \omega \operatorname{sen}(\gamma t)}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} = \frac{F_0}{2\omega^2} \operatorname{sen}(\omega t) - \frac{F_0}{2\omega} t \cos(\omega t).$$

Observamos que cuando t tiende a infinito los desplazamientos se hacen grandes y se obtiene el fenómeno de resonancia. ■

Problemas y cuestiones de la sección 3.7.3

1. Una masa de 0.5 kg se sujeta a un resorte suspendido del techo; esto ocasiona que el resorte se estire 0.98 m al llegar al reposo en equilibrio. En el instante $t = 0$, la masa se desplaza 1 m hacia abajo, y se suelta; en el mismo instante se aplica una fuerza externa $f(t) = 2\cos(2t)$ N al sistema. Si la constante de amortiguación es de 1 N.sg/m, determina el desplazamiento $x(t)$ de la masa en un instante $t > 0$ cualquiera. Considera $g = 9.8$ m/sg^2.

   (**Solución.** $x(t) = e^{-t}\left(\frac{7}{13}\cos(3t) - \frac{1}{39}\operatorname{sen}(3t)\right) + \frac{6}{13}\cos(2t) + \frac{4}{13}\operatorname{sen}(2t)$).

2. Una fuerza de 400 N estira un resorte de 2 m. Una masa de 50 kg se sujeta de un extremo del resorte, el cual pende verticalmente de un soporte, y se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 10 m/sg. Encuentra la ecuación del movimiento y determina la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento generado. ¿En qué instante pasa el cuerpo por la posición de equilibrio, en dirección hacia abajo, por tercera vez?

   (**Solución.** $x(t) = 5\operatorname{sen}(2t)$; $A = 5$; $P = \pi$; $\omega = \frac{1}{\pi}$; al cabo de π s.).

3.7.4. Existencia de la transformada de Laplace

En los ejemplos que dimos para el cálculo de la transformada de Laplace, vimos que las integrales existen para las funciones consideradas. Esto no ocurre con todas las funciones, por ejemplo, para $f(t) = \frac{1}{t}$ o $f(t) = e^{-t^2}$ la integral impropia no converge. En esta sección veremos bajo qué condiciones podemos garantizar que existe la transformada de Laplace.

■ **Definición 3.10.** Se dice que una función $f(t)$ es **contínua a trozos** en un intervalo $[a, b]$ si f es contínua en todo punto de $[a, b]$ salvo posiblemente en un número finito de puntos en los que $f(t)$ tiene discontinuidad de salto, es decir, en cada uno de estos puntos existen los límites laterales y son distintos (ver Figura 3.7). Una función se dice que es **continua a trozos** en $[0, +\infty[$ si es continua a trozos en todo $[0, b]$ para $b > 0$.

ISBN: 978-84-17429-33-1
Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

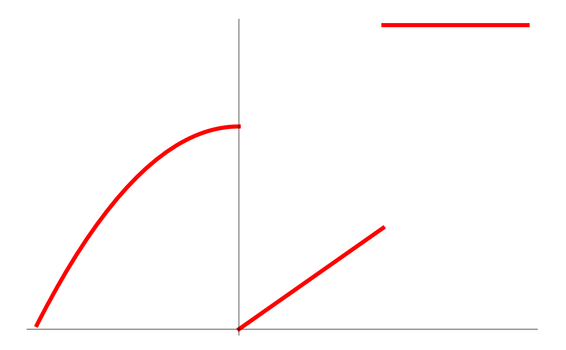


Figura 3.7: Función a trozos en $[a, b]$.

■ **Definición 3.11.** Se dice que una función $f(t)$ es de **orden exponencial** α si existen constantes positivas M y T tales que:

$$|f(t)| \leq M\, e^{\alpha t} \quad \text{para todo} \quad t \geq T. \tag{3.51}$$

Por ejemplo, la función $f(t) = t^3$ es de orden exponencial $\alpha = 2$ siendo $M = 1$ (ver Figura 3.8)

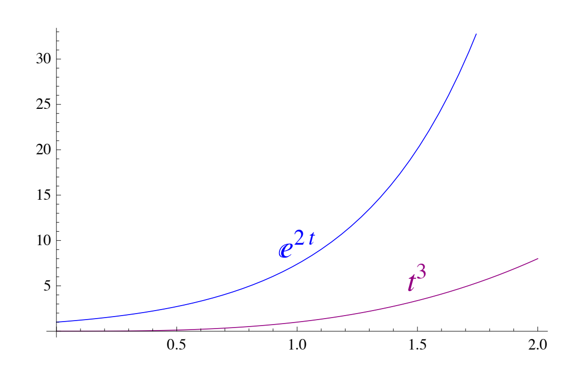


Figura 3.8: Función de orden exponencial 2.

■ **Teorema 3.11.** Si $f(t)$ es continua a trozos en $[0, +\infty[$ y es de orden exponencial α, entonces $L\,[f(t)]$ existe para $s > \alpha$.

Demostración. Tenemos que demostrar que la integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

converge para $s > \alpha$. Para ello, partimos la integral en dos partes:

$$\int_0^{T} e^{-st} f(t)\, dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \tag{3.52}$$

donde T se coge de forma que cumpla la desigualdad $|f(t)| \leq M\, e^{\alpha t}$. La primera integral es una integral no impropia que existe ya que $f(t)$ y e^{-st} son funciones continuas a trozos en el intervalo $[0, T]$, para cualquier s fijo.

Cristina Chiralt Monleón y Alejandro Miralles Montolío
ISBN: 978-84-17429-33-1
Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Veamos ahora que la segunda integral converge utilizando el criterio de comparación (o del mayorante) de las integrales impropias. Dado que $f(t)$ es de orden exponencial α, para $t \geq T$ se tiene:

$$|f(t)| \leq M\, e^{\alpha t}$$

y, por tanto,

$$\left|e^{-st} f(t)\right| = e^{-st}|f(t)| \leq M\, e^{-(s-\alpha)t}$$

para todo $t \geq T$. Ahora bien, para $s > \alpha$,

$$\int_T^{\infty} M\, e^{-(s-\alpha)t}\, dt = M \int_T^{\infty} e^{-(s-\alpha)t}\, dt = \frac{M\, e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} < \infty. \tag{3.53}$$

Puesto que $|e^{-st} f(t)| \leq M\, e^{-(s-\alpha)t}$ para $t \geq T$ y, como observamos en (3.53), la integral impropia de la función mayor es convergente para $s > \alpha$, por el criterio de comparación podemos afirmar que la integral:

$$\int_T^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

converge para $s > \alpha$. Puesto que las dos integrales de (3.52) existen y son convergentes, la transformada de Laplace $L\,[f(t)]$ existe para $s > \alpha$. ■

■ **Nota 3.17.** Observemos que podemos tomar $T = 0$ en la expresión (3.51).

TEMA 4

Introducción a los sistemas de ecuaciones diferenciales

4.1. Introducción

Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en las que aparecen dos o más funciones incógnitas, junto con sus derivadas y la variable independiente de la que dependen dichas funciones. Normalmente, utilizaremos t para la variable independiente y $x(t), y(t), z(t)$ para las funciones incógnita. Para mayor número de incógnitas, utilizaremos $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$. Nos centramos en el estudio de sistemas de primer orden, es decir, aquellos en los que sólo aparecen las primeras derivadas de las funciones incógnita y, además, trabajaremos sólo con aquellos de coeficientes constantes.

Hay diversos procedimientos para resolver sistemas de dos o tres ecuaciones. Aquí utilizaremos el llamado operador diferencial D, que permite reducir el sistema de EDO a un sistema de ecuaciones algebraicas.

Existen otros métodos para resolver sistemas de dos o tres ecuaciones que no trataremos aquí, como por ejemplo, el uso de la transformada de Laplace sobre las ecuaciones del sistema para reducirlo también a ecuaciones algebraicas. Para sistemas grandes de ecuaciones diferenciales, así como para análisis teóricos, son preferibles métodos matriciales, que tampoco trataremos aquí.

Nuestros objetivos en este tema serán:

- Aprender a convertir un sistema de dos ecuaciones al lenguaje del operador diferencial.
- Utilizar el método de eliminación de variables o Cramer para reducir el sistema a una EDO lineal con coeficientes constantes y resolverla aplicando las técnicas aprendidas en el tema anterior.
- Obtener las soluciones del resto de funciones incógnitas manipulando las ecuaciones del sistema.
- Resolver algunos ejemplos de sistemas de orden superior.
- Convertir una EDO lineal de orden n en un sistema de primer orden.

- Modelizar y resolver problemas provenientes de fenómenos reales donde aparecen sistemas de primer orden.

4.2. El operador diferencial. Sistemas de EDO lineales

4.2.1. El operador diferencial

El **operador diferencial** D es una aplicación que transforma una función en su derivada.

Ejemplo 4.1. La derivada de una función desconocida $x(t)$ vendrá dada por:

$$D(x) = \frac{dx}{dt} \quad \text{o bien} \quad D(x) = x'.$$

Si la función es conocida, obtenemos simplemente su derivada. Por ejemplo,

$$D(t^3 - \operatorname{sen}(2t)) = 3t^2 - 2\cos(2t).$$

Nota 4.1. Podemos aplicar el operador diferencial D múltiples veces y combinarlo para crear nuevos operadores $P(D)$ que resultan ser expresiones polinómicas en función de D:

- El operador D^2 denotará la derivada segunda de la expresión correspondiente. Por ejemplo, $D^2(t^4) = 12t^2$ o $D^2(x) = x''$.
- En general, el operador D^n denotará la derivada $n-$ésima. Por ejemplo, $D^4(e^{3t}) = 81e^{3t}$.
- Por ejemplo, el operador $P(D) = 3D^2 - 5D + 4$ aplicado a la función $x(t)$ quedaría: $P(D)(x) = 3x'' - 5x' + 4x$.

Cuando trabajamos con un sistema de ecuaciones diferenciales, podemos utilizar la notación del operador diferencial para expresarlo, tal como hacemos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.2. Expresa el siguiente sistema utilizando el operador diferencial D:

$$\begin{cases} 3x' - 6x + 8y' - y = \ln t \\ -x' + x - 2y' = e^{2t} \end{cases}$$

Quedaría:

$$\begin{cases} 3D(x) - 6x + 8D(y) - y = \ln t \\ -D(x) + x - 2D(y) = e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3D-6)(x) + (8D-1)(y) = \ln t \\ (-D+1)(x) - 2D(y) = e^{2t} \end{cases}$$

Definición 4.1. En general, un sistema de dos ecuaciones lineales de EDO con coeficientes constantes vendrá dado por:

$$\begin{cases} P_{11}(D)x + P_{12}(D)y = f_1(t) \\ P_{21}(D)x + P_{22}(D)y = f_2(t). \end{cases} \tag{4.1}$$

donde las expresiones $P_{ij}(D)$ son polinomios en la variable D con coeficientes constantes y $f_i(t)$ son funciones de la variable t.

■ **Nota 4.2.** En el caso en que trabajemos con sistemas lineales con coeficientes constantes como el anterior, podremos reducir el sistema utilizando manipulaciones algebraicas para conseguir una EDO lineal y resolverla aplicando los métodos aprendidos en el tema anterior. Este hecho se debe a que, en este caso, los operadores polinómicos de la forma $P(D)$ conmutan.

■ **Definición 4.2.** Una **solución** del sistema (4.1) es una pareja de funciones $x(t)$, $y(t)$ que satisfacen (4.1) en algún intervalo I.

A partir de ahora, en el resto del capítulo, trabajaremos únicamente con sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes.

4.2.2. Sistemas de dos ecuaciones diferenciales lineales y dos incógnitas

Utilizaremos dos métodos de resolución de sistemas algebraicos para resolver un sistema de dos EDO con dos incógnitas: el método de reducción y la regla de Cramer. En ambos casos, reduciremos el problema a una EDO de orden dos para hallar una de las incógnitas y despejaremos la otra utilizando las ecuaciones del sistema. Consideramos un sistema como el dado en (4.1) donde los $P_{ij}(D)$ serán polinomios de primer grado en la variable D y las $f_j(t)$ serán funciones de la variable t. Trataremos a este sistema como si se tratara de un sistema de ecuaciones algebraicas.

Resolución por reducción. Al igual que si fuera un sistema algebraico, tratamos de reducir una de las dos incógnitas en una de las ecuaciones.

Resolución utilizando el método de Cramer. Para resolver el sistema utilizando la regla de Cramer, teniendo en cuenta que tratamos a las EDO como ecuaciones algebraicas, es fácil deducir que:

$$\begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} f_1(t) & P_{12}(D) \\ f_2(t) & P_{22}(D) \end{vmatrix} \tag{4.2}$$

donde el determinante de la izquierda se calcula:

$$\begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{vmatrix} = P_{11}(D)P_{22}(D) - P_{12}(D)P_{21}(D) \tag{4.3}$$

y en el determinante de la derecha, deben entenderse las expresiones $P_{ij}(D)$ como operadores y las $f_i(t)$ como funciones a las que se les aplica tales operadores, es decir,

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & P_{12}(D) \\ f_2(t) & P_{22}(D) \end{vmatrix} = P_{22}(D)(f_1(t)) - P_{12}(D)(f_2(t)). \tag{4.4}$$

Las expresiones (4.3) y (4.4) demuestran que la ecuación con incógnita x dada por (4.2) será una EDO lineal de orden dos, que ya sabemos resolver. Para encontrar $y(t)$, bastará con sustituir $x(t)$ y $x'(t)$ en una de las dos ecuaciones iniciales o combinar tales ecuaciones para poder despejar $y(t)$. ■

■ **Nota 4.3.** De forma análoga, podemos obtener primero $y(t)$ con la regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & f_1(t) \\ P_{21}(D) & f_2(t)) \end{vmatrix} \tag{4.5}$$

donde el determinante de la izquierda se calcula como en (4.3) y:

$$\begin{vmatrix} P_{11}(D) & f_1(t) \\ P_{21}(D) & f_2(t)) \end{vmatrix} = P_{11}(D)(f_2(t)) - P_{21}(D)(f_1(t)).$$

Una vez obtenemos $y(t)$, se razona de forma análoga para obtener $x(t)$ a partir de las ecuaciones iniciales. ■

■ **Nota 4.4.** Debemos tener en cuenta que, como estamos trabajando con operadores diferenciales, la resolución por el método de Cramer no admite la posibilidad de pasar dividiendo el determinante que multiplica a las incógnitas.

⬢ **Ejemplo 4.3.** Veamos como resolver el siguiente sistema con los dos métodos propuestos:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y + 5t \\ y' = 3x + 4y + 17t \end{cases}$$

Pasamos las incógnitas x, y a la izquierda y dejamos los términos independientes a la derecha:

$$\begin{cases} x' - 5x - 2y = 5t \\ y' - 3x - 4y = 17t \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (D-5)x & - & 2y & = & 5t \\ -3x & + & (D-4)y & = & 17t \end{cases}$$

Resolución por reducción. Al igual que si fuera un sistema algebraico, tratamos de reducir la x en la segunda ecuación. Para ello, multiplicamos por 3 la primera ecuación y por $D-5$ la segunda:

$$\begin{cases} 3(D-5)x & - & 6y & = & 15t \\ -3(D-5)x & + & (D-5)(D-4)y & = & (D-5)(17t) \end{cases}$$

Al sumar las dos ecuaciones, eliminamos la x, obteniendo:

$$((D-5)(D-4)-6)y = (D-5)(17t) + 15t$$

que operando resulta:

$$(D^2 - 9D + 14)y = 17 - 5 \cdot 17t + 15t$$

y volviendo a la expresión sin operador diferencial, obtenemos:

$$y'' - 9y' + 14y = -70t + 17$$

que es una EDO lineal no homogénea de orden dos que podemos resolver. La ecuación homogénea asociada es $y'' - 9y' + 14y = 0$, cuyo polinomio característico es $r^2 - 9r + 14 = 0$, con soluciones $r_1 = 2, r_2 = 7$, así que la solución de la ecuación homogénea será $y_h(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{7t}$.

Para encontrar una solución particular $y_p(t)$, fijémonos en que el término independiente es $b(t) = -70t + 17$ y que $r = 0$ no es solución del polinomio característico. Por tanto, $y_p(t) = At + B$. Como $y_p' = A$ e $y_p'' = 0$, tendremos que:

$$0 - 9A + 14(At + B) = -70t + 17 \;\Rightarrow\; 14At + (14B - 9A) = -70t + 17,$$

e identificando coeficientes, tendremos que $A = -70/14 = -5$ y $B = -2$, es decir, $y_p(t) = -5t - 2$ y la solución general será:

$$y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{7t} - 5t - 2. \tag{4.6}$$

Para hallar $x(t)$, despejamos de la segunda ecuación del sistema:

$$y' - 3x - 4y = 17t \;\Rightarrow\; x(t) = \frac{1}{3}\left(y' - 4y - 17t\right)$$

y utilizando (4.6), obtenemos que:

$$x(t) = \frac{1}{3}\left(2C_1e^{2t} + 7C_2e^{7t} - 5 - 4(C_1e^{2t} + C_2e^{7t} - 5t - 2) - 17t\right)$$

que simplificando queda:

$$x(t) = -\frac{2}{3}C_1e^{2t} + C_2e^{7t} + t + 1.$$

Resolución utilizando la Regla de Cramer. Tendremos que:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} (D-5)x & - & 2y & = & 5t \\ -3x & + & (D-4)y & = & 17t \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} D-5 & -2 \\ -3 & D-4 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D-5 & 5t \\ -3 & 17t \end{vmatrix}$$

y, por tanto,

$$((D-5)(D-4)-6)y = (D-5)(17t) + 3\cdot 5t \Rightarrow (D^2 - 9D + 14)y = -70t + 17$$

y, a partir de aquí, razonamos como en la resolución por reducción. ■

■ **Teorema 4.1 (Teorema de existencia y unicidad).** Si el sistema contiene, a lo sumo, las primeras derivadas de las incógnitas $x(t), y(t)$, podemos escribirlo en la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x'(t) + a_2x(t) + b_1y'(t) + b_2y(t) = f_1(t) \\ c_1x'(t) + c_2x(t) + d_1y'(t) + d_2y(t) = f_2(t) \end{array}\right. \tag{4.7}$$

siendo, a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 1, 2$ valores reales, t la variable independiente y, $x(t)$ e $y(t)$ las funciones incógnita. Si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son continuas en un intervalo I que contenga al punto t_0, entonces existe una única solución del sistema (4.7) que satisface las condiciones iniciales:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{4.8}$$

La solución general de un sistema de EDO debe contener un número apropiado de constantes que viene determinado por el teorema siguiente:

■ **Teorema 4.2.** El número de constantes arbitrarias en la solución general del sistema lineal es igual al orden del polinomio en D que se obtiene de:

$$\Delta(D) = P_{11}P_{22}(D) - P_{12}(D)P_{21}(D),$$

suponiendo que $\Delta(D) \neq 0$.

■ **Nota 4.5.** Podríamos estar tentados de resolver el sistema, bien por reducción, bien utilizando la regla de Cramer y aplicar las reglas antes explicadas de forma independiente a cada una de las incógnitas $x(t)$ e $y(t)$. Esto no implica ningún problema salvo el hecho de que el número total de constantes que deben aparecer al final debe cumplir el teorema 4.2. Por tanto, si denotamos por C_1, C_2 las constantes de $x(t)$ y por K_1, K_2 las constantes de $y(t)$, al optar por este camino deberemos utilizar las EDO del sistema para encontrar la relación que existe entre éstas. En el ejemplo 4.4 vemos la forma de hacerlo.

⬣ **Ejemplo 4.4.** Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = 4x - 7y \end{cases} \tag{4.9}$$

Solución. En primer lugar, escribimos el sistema utilizando la notación de operadores,

$$\begin{cases} \underbrace{(D-3)}_{P_{11}(D)}x + \underbrace{4}_{P_{12}(D)}y = 0 \\ \underbrace{(-4)}_{P_{21}(D)}x + \underbrace{(D+7)}_{P_{22}(D)}y = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Eliminamos x multiplicando la primera ecuación por 4 y la segunda por $D-3$ dando lugar a:

$$\begin{cases} 4(D-3)x + 16y = 0 \\ -4(D-3)x + (D-3)(D+7)y = 0; \end{cases} \tag{4.11}$$

sumamos ambas ecuaciones y obtenemos:

$$(16 + (D-3)(D+7))\, y = 0, \tag{4.12}$$

que se reduce a $(D^2+4D-5)y = 0$. Esta expresión corresponde a una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de orden dos en la variable y:

$$y'' + 4y' - 5y = 0. \tag{4.13}$$

La solución general la podemos obtener utilizando las técnicas estudiadas para ecuaciones lineales,

$$y(t) = C_1\, e^{-5t} + C_2\, e^{t}. \tag{4.14}$$

Para encontrar $x(t)$ tenemos dos opciones. La primera consiste en volver al sistema (4.11) y eliminar y. Para ello multiplicamos la primera ecuación de

ese sistema por $(D+7)$, y la segunda ecuación por -4. Luego sumamos para obtener:

$$\left(D^2+4D-5\right)x=0, \quad \text{de donde} \quad x''+4x'-5x=0. \tag{4.15}$$

Casualmente, la ecuación (4.15) es la misma que la ecuación (4.12), excepto que aquí la función incógnita es $x(t)$. Por tanto,

$$x(t)=K_1\,e^{-5t}+K_2\,e^t. \tag{4.16}$$

donde K_1 y K_2 representan las constantes arbitrarias, las cuales no son necesariamente las mismas que C_1 y C_2 de la ecuación (4.14). Aplicando el teorema 4.2, sabemos que el conjunto de soluciones del sistema debe tener exactamente 2 constantes arbitrarias, ya que éste es el orden del polinomio $\Delta(D)=D^2+4D-5$. Para determinar las relaciones entre las cuatro constantes C_1, C_2, K_1 y K_2, sustituimos las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$ dadas en (4.14) y (4.16) en una de las ecuaciones del sistema (4.7), por ejemplo, la primera. Esto da lugar a la ecuación:

$$-5K_1\,e^{-5t}+K_2\,e^t=3K_1\,e^{-5t}+3K_2\,e^t-4C_1\,e^{-5t}-4C_2\,e^t,$$

la cual se reduce a:

$$(4C_1-8K_1)\,e^{-5t}+(4C_2-2K_2)\,e^t=0. \tag{4.17}$$

Dado que e^{-5t} y e^t son funciones linealmente independientes en cualquier intervalo, la ecuación (4.17) se verifica para todo t solamente si:

$$4C_1-8K_1=0 \quad \text{y} \quad 4C_2-2K_2=0.$$

Por tanto,

$$K_1=C_1/2 \quad \text{y} \quad K_2=2C_2.$$

Por tanto, la solución general del sistema (4.7) estará dada por las funciones:

$$x(t)=\frac{1}{2}C_1\,e^{-5t}+2C_2\,e^t \quad \text{e} \quad y(t)=C_1\,e^{-5t}+C_2\,e^t. \tag{4.18}$$

La opción preferida, como ya hemos explicado antes, para obtener $x(t)$ a partir de $y(t)$ consiste en utilizar el sistema para obtener una ecuación en la que $x(t)$ viene dada en términos de $y(t)$ y $y'(t)$. En este ejemplo, despejando $x(t)$ de la segunda ecuación del sistema (4.7) obtenemos:

$$x(t)=\frac{1}{4}y'(t)+\frac{7}{4}y(t).$$

Sustituyendo $y(t)$, dada por (4.14), resulta:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4}\left(-5C_1\,e^{-5t}+C_2\,e^t\right)+\frac{7}{4}\left(C_1\,e^{-5t}+C_2\,e^t\right) \\ &= \frac{1}{2}C_1\,e^{-5t}+2C_2\,e^t, \end{aligned}$$

que coincide con (4.18). ■

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

4.2.3. Sistemas de n ecuaciones diferenciales lineales y n incógnitas

Lo que hemos hecho en el apartado anterior podemos generalizarlo a sistemas en los que tenemos, normalmente, n ecuaciones y n funciones incógnitas, denotadas por $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$.

Definición 4.3. Un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes viene dado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1'(t) + \ldots + a_{1n}x_n'(t) + b_{11}x_1(t) + \ldots + b_{1n}x_n(t) = f_1(t) \\ a_{21}x_1'(t) + \ldots + a_{2n}x_n'(t) + b_{21}x_1(t) + \ldots + b_{2n}x_n(t) = f_2(t) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1'(t) + \ldots + a_{nn}x_n'(t) + b_{n1}x_1(t) + \ldots + b_{nn}x_n(t) = f_n(t) \end{cases}$$

donde, a_{ij}, b_{ij} con $i, j = 1, \ldots, n$ son valores reales, t es la variable independiente y , $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ son las funciones incógnita. Se resuelve de forma análoga al método descrito para dos ecuaciones y dos incógnitas y una solución de tal sistema es un conjunto de funciones $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ que cumplen todas las ecuaciones del sistema en un intervalo I.

Ejemplo 4.5. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} -x & + & y & + & z' & = & t \\ x' & - & y & + & 2z & = & -t \\ x' & & & + & 8z & = & 0 \end{cases}$$

Solución. Sumando las dos primeras ecuaciones, obtenemos la ecuación $x' + x + z' + 2z = 0$ que junto con la tercera ecuación forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x' - x & + & z' + 2z & = & 0 \\ x' & + & 8z & = & 0 \end{cases}$$

Utilizando el operador diferencial y despejando, por ejemplo, x con la regla de Cramer, obtendremos:

$$\begin{cases} (D-1)x & + & (D+2)z & = & 0 \\ Dx & + & 8z & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} D-1 & D+2 \\ D & 8 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} D-1 & 0 \\ D & 0 \end{vmatrix}$$

y, por tanto,

$$((D-1)8 - D(D+2))x = 0 \Longrightarrow (-D^2 + 6D - 8)x = 0 \Longrightarrow x'' - 6x' + 8x = 0,$$

así que el polinomio característico será $r^2 - 6r + 8 = 0$ cuyas soluciones son $r = 2, r = 4$ y, por tanto,

$$x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{4t}.$$

De la segunda ecuación del sistema con x y z despejamos z, obteniendo que $x = -\frac{1}{8}x'$, así que:

$$z(t) = -\frac{1}{8}(2C_1e^{2t} + 4C_2e^{4t}) = -\frac{C_1}{4}e^{2t} - \frac{C_2}{2}e^{4t}.$$

Del sistema inicial podemos despejar y de la primera ecuación, obteniendo $y = t + x - z'$ y, por tanto,

$$y(t) = t + C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - (-2\frac{C_1}{4}e^{2t} - 4\frac{C_2}{2}e^{4t}) = \frac{3C_1}{2}e^{2t} + 3C_2e^{4t} + t. \;\blacksquare$$

Estudio del sistema según $\Delta(D)$

Si $\Delta(D) \neq 0$, utilizamos los métodos anteriormente descritos (método de reducción o Regla de Cramer). Si $\Delta(D) = 0$, se dice que es un **sistema degenerado**. Como ocurre cuando resolvemos un sistema de ecuaciones algebraicas, un sistema degenerado puede no tener solución, o tener infinitas soluciones. Si posee soluciones, éstas pueden contener cualquier número de constantes arbitrarias.

⬢ **Ejemplo 4.6.** Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x' + y' + y = e^t \\ x' + y' + y = 0 \end{cases}$$

Solución. Escribimos el sistema en términos del operador diferencial:

$$\begin{cases} Dx + (D+1)y = e^t \\ Dx + (D+1)y = 0. \end{cases}$$

Calculamos el determinante,

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D & D+1 \\ D & D+1 \end{vmatrix} = 0$$

El sistema es degenerado, por tanto, puede no tener solución o tener infinitas soluciones. En este caso, restando ambas ecuaciones llegamos a que $e^t = 0$. Por tanto, este sistema no tiene solución. ■

⬢ **Ejemplo 4.7.** Comprueba que el sistema siguiente tiene infinitas soluciones linealmente independientes.

$$\begin{cases} x' - 2y' + 3x - y = t^2 \\ x'' - 2y'' + 3x' - y' = 2t \end{cases}$$

Solución. Claramente, la segunda ecuación se deduce de la primera derivando, así que sólo tenemos una ecuación independiente y dos incógnitas, obteniendo infinitas soluciones. ■

■ **Nota 4.6.** Es conveniente, por todo lo explicado anteriormente, estudiar el número de constantes del sistema cuando comencemos a resolver el problema.

Problemas de la sección 4.2

1. Escribe los siguientes sistemas utilizando la notación de operadores diferenciales.

(a) $\begin{cases} x' = 2x + 4y - t^2 + 8t \\ y' = -x - 3y + \operatorname{sen}(t+1) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x'' - 3x' + 5y'' - 7y = 0 \\ 3x'' + 2x' - x + 6y' - 7y = 3t - 1 \end{cases}$

(Solución. (a) $(D-2)x - 4y = -t^2 + 8t, x + (D+3)y = \operatorname{sen}(t+1)$
(b) $(2D^2 - 3D)x + (D^2 - 7)y = 0, (3D^2 + 2D - 1)x + (6D - 7)y = 3t - 1$**).**

2. Resuelve los siguientes sistemas:

(a) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' + y' + 2x = 0 \\ x' + y' - x - y = \operatorname{sen} t \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x' + y' - x - y = e^{-t} \\ x' + y' + 2x + y = e^t \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x' + y = t^2 \\ -x + y' = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' = 5x + 2y + 5t \\ y' = 3x + 4y + 17t \end{cases}$

(f) $\begin{cases} (D-3)x + (D-1)y = t \\ (D+1)x + (D+4)y = 1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y'' + x' + x = \operatorname{sen} t \\ y' - y + x = 0. \end{cases}$

(h) $\begin{cases} D^2x + Dy = 2 \\ 4x + Dy = 6 \end{cases}$

(Solución.

(a) $x(t) = -\dfrac{1}{2}C_1e^{3t} + \dfrac{1}{2}C_2e^{-t}, \quad y(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$

(b) $x(t) = C_1e^t - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} t + \dfrac{1}{4}\cos t, \quad y(t) = -3C_1e^t - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} t - \dfrac{3}{4}\cos t.$

(c) $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t, y(t) = \dfrac{1}{2}e^t - \dfrac{1}{2}e^{-t} - \frac{C_1+3C_2}{2}\operatorname{sen} t - \frac{3C_1-C_2}{2}\cos t.$

(d) $x(t) = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t + 2t - 1, \quad y(t) = C_1\operatorname{sen} t - C_2\cos t - 2 + t^2.$

(e) $x(t) = C_1\, e^{7t} + C_2\, e^{2t} + t + 1, \quad y(t) = C_1\, e^{7t} - \dfrac{3}{2}\, C_2e^{2t} - 5t - 2.$

(f) $x(t) = -\dfrac{5}{4}C_1\, e^{11t} - \dfrac{4}{11}t - \dfrac{26}{121}, \quad y(t) = C_1\, e^{11t} + \dfrac{1}{11}t + \dfrac{45}{121}.$

(g) $x(t) = \operatorname{sen} t - \cos t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t.$

(h) $x(t) = C_1\, e^{2t} + C_2\, e^{-2t} + 1, \quad y(t) = 2t - 2C_1\, e^{2t} + 2C_2\, e^{-2t} + C_3$**).**

3. Resuelve los sistemas siguientes:

(a) $\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = 3x + 3y - z \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (D+2)x + (D+2)y = e^{-3t} \\ (D+3)x + (D+3)y = e^{-2t} \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' + 2 + 2y' = 4x + 5y \\ 2x' - y' = 3x; \end{cases}$ con $x(0) = 1,\ y(0) = -1$

(d) $\begin{cases} (D^2+1)x + y = e^t \\ x + (D^2+1)y = 0. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x' - y + z = 0 \\ -x + y' - y = 0 \\ -x + z' - z = 0. \end{cases}$

(Solución.

(a) $x(t) = \frac{1}{2}e^t\left((C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\operatorname{sen} t\right) + C_3e^{2t}$,
$y(t) = e^t\left(C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t\right)$,
$z(t) = \frac{3}{2}e^t\left((C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\operatorname{sen} t\right) + C_3e^{2t}$.

(b) Cualesquiera cumpliendo $x + y = e^{-2t} - e^{-3t}$.

(c) $x(t) = -\frac{1}{5}\,e^{3t} + \frac{6}{5}e^t, \quad y(t) = -\frac{1}{5}\,e^{3t} - \frac{6}{5}e^t + \frac{2}{5}$.

(d) $x(t) = -C_1 - C_2t + C_3\cos(\sqrt{2}t) + C_4\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \frac{2}{3}e^t$,
$y(t) = C_1 + C_2t + C_3\cos(\sqrt{2}t) + C_4\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) - \frac{1}{3}e^t$.

(e) $x(t) = -C_1 + C_3\,e^t, \quad y(t) = C_1 + C_2\,e^t + C_3\,t\,e^t$,
$z(t) = C_1 + C_2\,e^t + C_3\,e^t\,(t-1)$**).**

4.3. Conversión de una EDO lineal de orden n a un sistema de primer orden

Al llevar a cabo el método de eliminación obtenemos del sistema una ecuación diferencial de orden mayor pero que contiene una sola variable independiente. El proceso inverso también es posible y muy útil al resolver ecuaciones diferenciales, sobre todo por métodos numéricos. Esto es, vamos a reescribir una ecuación diferencial de orden n como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden. En este planteamiento se pueden aplicar las robustas técnicas del álgebra lineal.

■ **Definición 4.4.** Si un sistema de orden n se escribe en la forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & f_1(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ x_2'(t) & = & f_2(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ & \vdots & \\ x_n'(t) & = & f_n(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}\right. \tag{4.19}$$

se dice que está en **forma normal**.

■ **Nota 4.7.** Cualquier ecuación diferencial de orden n:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{4.20}$$

se puede transformar en un sistema de primer orden en forma normal haciendo:

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \cdots, x_n = y^{(n-1)}. \tag{4.21}$$

Por tanto, el sistema que obtenemos es:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & y' = x_2 \\ x_2' & = & y'' = x_3 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}' & = & y^{(n-1)} = x_n \\ x_n' & = & y^{(n)} = f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}\right. \tag{4.22}$$

Si la ecuación (4.20) tiene condiciones iniciales:

$$y(t_0) = a_1, y'(t_0) = a_2, \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = a_n,$$

entonces el sistema (4.22) tiene las condiciones iniciales:

$$x_1(t_0) = a_1, x_2(t_0) = a_2, \cdots, x_n(t_0) = a_n.$$

⬢ **Ejemplo 4.8.** Convierte el problema de valor inicial:

$$y'' + 3y' + 2y = \cos(3t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

en un sistema de primer orden.

Solución. Renombramos la función incógnita y sus derivadas,

$$\begin{aligned} y &= x_1 \\ y' &= x_1' = x_2 \end{aligned}$$

y despejando de la EDO y'' tenemos:

$$y'' = x_2' = -3y' - 2y + \cos(3t) = -3x_2 - 2x_1 + \cos(3t).$$

Además las condiciones iniciales, con las nuevas variables, quedará $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 3$. El sistema queda,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -2x_1 - 3x_2 + \cos(3t). \end{aligned}$$

con la condición inicial $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 3$. ■

Problemas de la sección 4.3

1. Convierte en un sistema cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales.

   (a) $y''' - 6y'' + 4y' + y = \operatorname{sen} t$.

   (b) $t\,y'''' - 5t^2\,y'' + 6y' - 7y = e^t$.

   (Solución. (a) $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$, $x_3' = -x_1 - 4x_2 + 6x_3 + \operatorname{sen} t$, (b) $x_1' = x_2$, $x_2' = x_3$, $x_3' = x_4$, $x_4' = \dfrac{7}{t}x_1 - \dfrac{6}{t}x_2 + 5tx_3 + e^t$**)**.

4.4. Aplicaciones de sistemas de EDO a mezclas en depósitos interconectados

Al estudiar las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden vimos cómo modelizar, mediante una ecuación diferencial, la velocidad de cambio de una sustancia disuelta en un líquido contenido en un tanque, en el

ISBN: 978-84-17429-33-1
Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

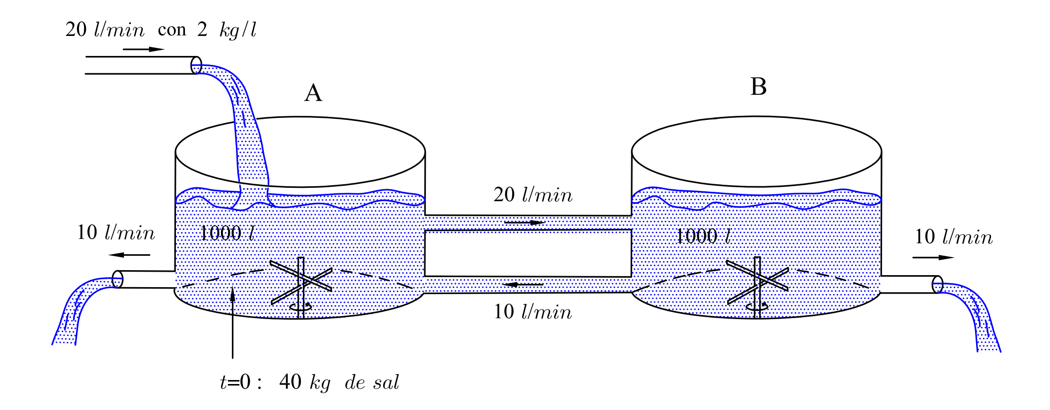


Figura 4.1: Tanques interconectados.

cual entraba un fluido con una cierta concentración de dicha sustancia y donde la mezcla fluía hacia fuera del tanque. Recordemos que si $x(t)$ es la cantidad de sustancia presente en el tanque en el instante t y $\frac{dx}{dt}$ es la rapidez con que x cambia respecto al tiempo, la ecuación diferencial que modeliza este problema viene dada por:

$$\frac{dx}{dt} = v_e - v_s,$$

donde:

$v_e(cantidad/t) =$	velocidad de entrada del fluido (vol/t)	$\times$	concentración al entrar $(cantidad/vol)$
$v_s(cantidad/t) =$	velocidad de salida del fluido (vol/t)	$\times$	concentración al salir $(cantidad/vol)$

siendo la concentración de salida, la cantidad de sustancia $x(t)$ dividida por el volumen total en el tanque en dicho instante t.

Ahora consideraremos dos depósitos interconectados entre sí y veremos que las dos ecuaciones que modelizan el problema forman un sistema de EDO. De forma análoga, se pueden considerar más de dos depósitos interconectados.

⬣ **Ejemplo 4.9.** Consideremos dos tanques interconectados, conteniendo 1000 litros de agua cada uno de ellos (ver figura 4.1). El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a razón de 20 l/min y de B hacia A a razón de 10 l/min. Además, una solución de salmuera con una concentración de 2 kg/l de sal fluye hacia el tanque A a razón de 20 l/min, manteniéndose bien agitado el líquido contenido en el interior de cada tanque. La solución diluida fluye hacia el exterior del sistema, desde el tanque A a razón de 10 l/min y desde el tanque B también a razón de 10 l/min. Si inicialmente el tanque B sólo contiene agua y el tanque A contiene 40 kg. de sal, calculemos la concentración de sal en el tanque B al cabo de 10 min.

Solución. Denotaremos por $x(t)$ e $y(t)$ a las cantidades de sustancia de los depósitos A y B respectivamente en el instante t. Fijémonos en que el volumen en cada depósito es constante e igual a 1000 l. ya que en el depósito A, entran $20+10$ l. cada minuto y salen $10+20$. Análogamente, en el depósito B entran 20 l. cada minuto y salen $10+10$. Teniendo en cuenta la EDO que modeliza los problemas en un tanque, obtendremos:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x' & = & 20\cdot 2+10\cdot\frac{y}{1000} & - & 20\cdot\frac{x}{1000}-10\cdot\frac{x}{1000}, \\ y' & = & 20\cdot\frac{x}{1000} & - & 10\cdot\frac{y}{1000}-10\cdot\frac{y}{1000} \end{array}\right.$$

y operando, queda:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x' & = & 40+0.01y & - & 0.03x, \\ y' & = & 0.02x & - & 0.02y. \end{array}\right.$$

Pasandolo a notación con el operador diferencial, quedará:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (D+0.03)x-0.01y & = & 40, \\ -0.02x+(D+0.02)y & = & 0. \end{array}\right.$$

De la segunda ecuación deducimos que $x=(50D+1)y$, así que, sustituyendo en la primera ecuación, obtendremos que $(D+0.03)(50D+1)y-0.01y=40$, así que $(50D^2+2.5D+0.02)y=40$ y, dividiendo entre 50, obtenemos la EDO de segundo orden:

$$y''+0.05y'+0.0004y=0.8.$$

La solución de la EDO homogénea será $y_h(t)=C_1e^{-0.01t}+C_2e^{-0.04t}$ y una solución particular será de la forma $y_p(t)=A$. Sustituyendo, obtenemos que $0.0004A=0.8$, así que $A=2000$, obteniendo:

$$y(t)=C_1e^{-0.01t}+C_2e^{-0.04t}+2000$$

y como $x=50y'+y$, tendremos que:

$$x(t)=50(-0.01C_1e^{-0.01t}-0.04C_2e^{-0.04t})+C_1e^{-0.01t}+C_2e^{-0.04t}+2000$$

que simplificando queda:

$$x(t)=\frac{1}{2}C_1e^{-0.01t}-C_2e^{-0.04t}+2000.$$

Las hipótesis del problema indican que $x(0)=40$ e $y(0)=0$, obtendremos que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}C_1-C_2+2000 & = & 0, \\ C_1+C_2+2000 & = & 40. \end{array}\right.$$

y, sumando las dos ecuaciones y despejando C_1, obtenemos que $C_1=-2640$ y $C_2=640$, así que, finalmente,

$$x(t)=-1320e^{-0.01t}-640e^{-0.04t}+2000$$

$$y(t)=-2640e^{-0.01t}+640e^{-0.04t}+2000$$

y, por tanto, la cantidad de sal en el depósito B al cabo de 10 min. será de $y(10)=40.234$ kg. de sal y, por tanto, la concentración en ese instante será aproximadamente $40.234/1000=0.04$. ■

Problemas de la sección 4.4

1. Consideremos dos tanques, A y B, conteniendo 1000 litros de agua cada uno de ellos e interconectados. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a razón de 30 l/min y del tanque B hacia el A a razón de 10 l/min. Una solución de salmuera con una concentración de 2 kg/l de sal fluye hacia el tanque A a razón de 60 l/min, manteniéndose bien agitado el líquido contenido en el interior de cada tanque. La solución diluida fluye hacia el exterior del sistema, desde el tanque A a razón de 40 l/min y desde B a razón de 20 l/min. Si inicialmente el tanque A sólo contiene agua y el tanque B contiene 200 kg de sal, calcula qué cantidad de sal habrá en cada tanque al cabo de 10 min.

   (**Solución.** 879.213 kg en el tanque A y 280.732 kg en el tanque B).

2. Dos tanques A y B, cada uno de ellos conteniendo 50 litros de agua, se encuentran interconectados. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a razón de 5 l/min. Una solución de salmuera con una concentración de 3 kg/l de sal fluye hacia el tanque A a razón de 5 l/min, manteniéndose bien agitado el líquido contenido en el interior de cada tanque. La solución diluida fluye hacia el exterior del sistema, desde el tanque B a razón de 4 l/min. Si inicialmente tanto el tanque A como el B contienen 50 kg de sal, determina el sistema de ecuaciones diferenciales que modeliza este problema (pero no lo resuelvas) y las condiciones iniciales.

   (**Solución.** $x'(t) = -\frac{1}{10}x + 15$, $y'(t) = \frac{1}{10}x - \frac{4}{50+t}y$, con $x(0) = 50$, $y(0) = 50$).

3. Dos depósitos interconectados contienen 2000 l de agua contaminada cada uno de ellos. El agua contaminada empieza a fluir al depósito A a razón de 90 l/min con una concentración de contaminantes de 2 kg/l, el líquido fluye del depósito A al depósito B a razón de 10 l/min. Supongamos que el líquido contenido en el interior de cada depósito se mantiene bien agitado. La solución fluye hacia el exterior del sistema desde A a razón de 80 l/min y desde B a razón de 10 l/min. Inicialmente, A contenía 10 kg de contaminante y B estaba limpio de contaminantes. Calcula la cantidad de contaminantes que alcanzará cada uno de los depósitos a lo largo del tiempo y la concentración en A al cabo de 2 h.

   (**Solución.** $x(t) = 4000 - 3990\,e^{-9t/200}$,
   $y(t) = 4000 + \frac{1995}{4}\,e^{-9t/200} - \frac{17995}{4}\,e^{-t/200}$ y la concentración en A al cabo de 2 h es aproximadamente de 1.99099 kg.).

4.5. Proyecto para el capítulo 4. Aplicaciones de sistemas a circuitos eléctricos y sistemas masa-resorte

4.5.1. Circuitos eléctricos

En esta sección consideraremos circuitos compuestos por varias mallas. Una **malla** consiste en un camino cerrado en un circuito eléctrico. Por ejemplo, en la figura 4.2 tenemos un circuito formado por tres mallas: (1) $ABMNA$, (2) $BJKMB$ y (3) $ABJKMNA$. Los puntos donde se unen dos o más mallas se denominan **nudos** o **puntos de ramificación**.

La dirección del flujo de corriente se designa arbitrariamente. Aplicaremos la *Ley de Kirchhoff* de la tensión y también la de la corriente, que establece que en una red eléctrica, la corriente total que llega a un nudo es igual a la corriente total que sale de él.

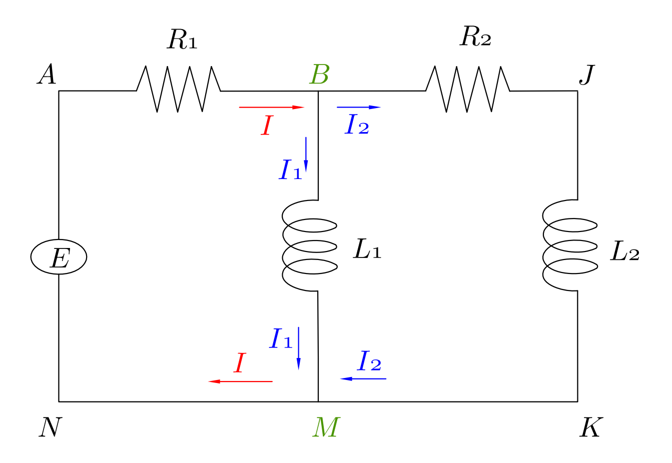


Figura 4.2: Circuito formado por tres mallas.

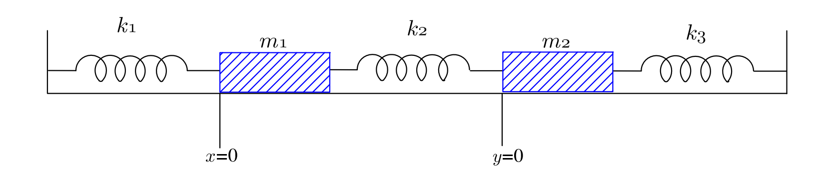
⬢ **Ejercicio 4.1.** Determina el sistema de ecuaciones diferenciales que modeliza el circuito de la figura 4.2 si E es una fuerza electromotriz constante de 30 V, R_1 es una resistencia de 10 Ω, R_2 es una resistencia de 20 Ω, L_1 es un inductor de 0.02 H, L_2 es un inductor de 0.04 H e inicialmente, las corrientes son 0. Calculemos además, las corrientes en cada instante t.

4.5.2. Sistemas masa-resorte acoplados

Supongamos que tenemos un sistema masa-resorte acoplado formado por dos masas m_1 y m_2 y tres resortes con constantes k_1, k_2 y k_3, respectivamente (ver figura 4.3). Inicialmente, desplazamos las masas poniendo el sistema en movimiento. Veamos cuáles son las ecuaciones que describen el movimiento de este sistema.

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152



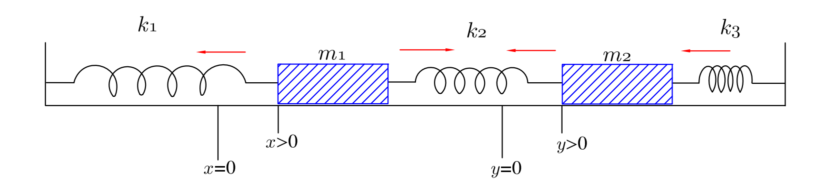


Figura 4.3: Sistema masa-resorte acoplado.

Sea $x(t)$ el desplazamiento de la masa m_1 en un instante t y sea $y(t)$ el desplazamiento de la masa m_2 en un instante t. Veamos qué fuerzas actúan sobre cada masa debidas a los resortes y recordemos la segunda Ley de Newton y la Ley de Hooke.

- Sobre m_1 actúan dos fuerzas, una fuerza F_1 debida al resorte de constante k_1 :

$$F_1 = -k_1 x(t)$$

  y una fuerza F_2 debida al resorte de constante k_2 :

$$F_2 = k_2(y(t) - x(t)).$$

  El signo y dirección de F_2 viene determinado por el signo de $y(t) - x(t)$, es decir, depende de que dicho muelle haya sido estirado o contraído.

- Sobre la masa m_2 actúan dos fuerzas, una fuerza F_3 debida al resorte de constante k_2 :

$$F_3 = -k_2(y(t) - x(t))$$

  y una fuerza $F_4 = -k_3 y(t)$, debida al resorte de constante k_3 :

$$F_4 = -k_3 y(t),$$

  que sólo depende del desplazamiento de la masa m_2.

Aplicando la segunda Ley de Newton, tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1\, x''(t) = -k_1\, x(t) + k_2(y(t) - x(t)) \\ \\ m_2\, y''(t) = -k_2(y(t) - x(t)) - k_3 y(t) \end{array} \right.$$

o bien,

$$\left\{ \begin{array}{l} x''(t) = -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1}\, x(t) + \dfrac{k_2}{m_1}\, y(t) \\ y''(t) = \dfrac{k_2}{m_2}\, x(t) - \dfrac{k_2 + k_3}{m_2}\, y(t) \end{array} \right.$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{array}{ll} x(0) = x_0 & x'(0) = v_0 \\ y(0) = y_0 & y'(0) = w_0 \end{array}$$

siendo x_0 e y_0 los desplazamientos iniciales de las masas m_1 y m_2, respectivamente y v_0 y w_0 las velocidades iniciales que se les imprime a las masas m_1 y m_2, respectivamente, al soltarlas.

⬣ **Ejercicio 4.2.** Supongamos que tenemos el sistema masa-resorte de la figura 4.3 donde $k_1 = k_2 = k_3 = k$ y $m_1 = m_2 = m$. Si inicialmente se desplaza sólo la masa m_2 una distancia $d > 0$, es decir, hacia la derecha, determina las ecuaciones de cada movimiento.

TEMA 5

Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

5.1. Introducción

Algunas de las leyes que describen fenómenos físicos están relacionadas con las derivadas respecto del espacio y del tiempo. Es por ello que en muchos campos de la física y de la ingeniería es imprescindible el uso de *ecuaciones en derivadas parciales* (EDP), Algunas de las áreas en las que se utilizan de forma habitual EDP son: acústica, aerodinámica, elasticidad, electrodinámica, dinámica de fluidos, geofísica, transferencia de calor, meteorología, biología, medicina, oceanografía, óptica, ingeniería del petróleo, física del plasma o mecánica cuántica, entre otros.

Las EDP cuyas aplicaciones son más significativas son las ecuaciones lineales de segundo orden y todas ellas se pueden clasificar en uno de estos tres tipos:

- **Tipo hiperbólico:** problemas que modelizan fenómenos oscilatorios como vibraciones de cuerda, membranas y oscilaciones electromagnéticas.

- **Tipo parabólico:** problemas que se presentan al estudiar los procesos de conductividad térmica y difusión.

- **Tipo elíptico:** problemas que aparecen al estudiar procesos estacionarios, es decir, procesos que no cambian con el tiempo.

La ecuación de ondas, la ecuación del calor y la ecuación de Laplace son, respectivamente, prototipos de cada una de estas tres categorías. Por tanto, el estudio de estas tres ecuaciones nos proporcionará información acerca de EDP lineales de segundo orden más generales.

Los objetivos en este tema son:

- Conocer los conceptos básicos que utilizaremos para estudiar las EDP.

- Clasificar las EDP de segundo orden.

5.2. Teoría básica

■ **Definición 5.1.** Una EDP es una ecuación donde la incógnita es una función de dos o más variables en las que aparece la función, sus variables independientes y algunas de sus derivadas parciales de cualquier orden.

Cuando trabajemos con magnitudes físicas, utilizaremos x, y, z para denotar variables independientes espaciales y t para denotar la variable independiente temporal. La función incógnita que buscamos la denotaremos normalmente con la letra u. En caso de tener un número elevado de variables independientes, las denotaremos por $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Para simplificar la notación, utilizaremos subíndices para denotar las derivadas parciales. Así, por ejemplo, si trabajamos con la función $u(x,t)$, llamaremos:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{tx} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \text{ etc.}$$

En el tema 1 estudiamos conceptos básicos sobre EDP, como son su orden, linealidad y homogeneidad.

⬣ **Ejemplo 5.1.** Algunas EDP lineales conocidas son las siguientes:

- Ecuación del calor en una dimensión: $u_t = c^2 u_{xx}$.
- Ecuación del calor en dos dimensiones: $u_t = c^2(u_{xx} + u_{yy})$.
- Ecuación unidimensional de onda: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.
- Ecuación de ondas en tres dimensiones: $u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$.
- Ecuación del telégrafo: $u_{tt} = u_{xx} + \alpha\, u_t + \beta\, u$.
- Ecuación de Laplace bidimensional: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- Ecuación de Laplace en coordenadas polares: $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$.
- Ecuación del transporte (tráfico): $u_t + f(u) u_x = 0$.

■ **Definición 5.2.** Una **solución** de una EDP en una región R del espacio de las variables independientes es una función u para la cuál existen todas las derivadas parciales que aparecen en la ecuación en todos los puntos de R y que satisface la ecuación en todos esos puntos.

El conjunto de soluciones de una EDP suele ser muy grande. Por ejemplo, funciones tan distintas como:

$$u = x^2 - y^2, \qquad u = e^x \cos y, \qquad u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

son soluciones de la ecuación bidimensional de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

como se puede comprobar de forma sencilla.

■ **Nota 5.1.** Una diferencia importante entre las soluciones de una EDP y una EDO es que la solución general de una EDO suele contener constantes arbitrarias que determinan las soluciones particulares al sustituir estas constantes por números concretos mientras que la solución general de una EDP contiene funciones arbitrarias. Por ejemplo, dada la EDP:

$$y\, u_y = u, \tag{5.1}$$

cuya función incógnita es $u(x, y)$, es fácil comprobar que una solución viene dada por:

$$u(x, y) = y\, f(x), \tag{5.2}$$

donde $f(x)$ es una función arbitraria de x. Así, las funciones $u_1(x, y) = x^2 y$ o $u_2(x, y) = y \cos x$ son soluciones de la EDP. ■

Si una EDO es lineal y homogénea, pueden obtenerse soluciones nuevas a partir de soluciones conocidas aplicando el llamado *principio de superposición*. Para una EDP lineal y homogénea la situación es muy parecida:

■ **Teorema 5.1** (Principio de superposición)**.** Si u_1 y u_2 son soluciones cualesquiera de una EDP lineal y homogénea en alguna región R, entonces:

$$u = C_1\, u_1 + C_2\, u_2,$$

donde C_1 y C_2 son constantes cualesquiera, también es una solución de esa ecuación en R.

En muchos casos, la solución general de una EDP se usa poco ya que la solución correspondiente a un problema físico dado se obtiene mediante el uso de las condiciones adicionales que surgen del problema: *condiciones iniciales* y *condiciones de frontera* dependiendo de si se refieren a condiciones sobre la variable temporal o sobre las variables espaciales:

- **Condiciones iniciales.** Son condiciones del problema asociadas a la variable temporal cuando $t = 0$.

- **Condiciones de contorno o de frontera.** Son condiciones del problema relativas a las variables espaciales. Normalmente, se refieren a condiciones en que la función u asume valores dados en la frontera de la región considerada.

5.3. Resolución de algunas EDP sencillas

En este apartado veremos como resolver algunas EDP que pueden reducirse a EDO.

⬢ **Ejemplo 5.2.** Encuentra una solución $u(x, y)$ de la EDP $u_{xx} - u = 0$.

Solución. Puesto que no está presente ninguna derivada en la variable y, esta ecuación puede resolverse como $u'' - u = 0$ para la cual habríamos obtenido la solución $u = A\,e^x + B\,e^{-x}$ con A y B constantes. En este caso, A y B pueden ser realmente funciones de y, luego la solución será:

$$u(x, y) = A(y)\,e^x + B(y)\,e^{-x}$$

con funciones arbitrarias $A(y)$ y $B(y)$. Siempre podemos comprobar que el resultado es válido por derivación. ■

⬢ **Ejemplo 5.3.** Encuentra las $u(x, y)$ cumpliendo la EDP $u_{xy} = -u_x$.

Solución. Haciendo $u_x = p$, se tiene $p_y = -p$, de donde:

$$\frac{p_y}{p} = -1 \implies \ln p = -y + A_1(x) \implies p = A(x)\,e^{-y}$$

y, por integración con respecto a x, $u(x, y) = \left(\int A(x)\,dx\right) e^{-y} + g(y)$, así que denotando $f(x) = \int A(x)\,dx$, la solución será:

$$u(x, y) = f(x)e^{-y} + g(y)$$

para $f(x)$ y $g(y)$ funciones arbitrarias. ■

Problemas y cuestiones de la sección 5.2

1. Comprueba que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación de Laplace bidimensional:

   (a) $u(x, y) = e^{\frac{y}{2}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   (b) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$

   (c) $u(x, y) = \arctan(x/y)$.

2. Comprueba que las siguientes funciones son soluciones de la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ para un valor apropiado de c y determina el valor de c:

   (a) $u(x, y) = x^2 + 4t^2$.

   (b) $u(x, y) = \operatorname{sen}(6t)\operatorname{sen}(2x)$.

3. Demuestra que $u(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es solución de la ecuación de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

4. Encuentra las soluciones $u(x, y)$ de las siguientes EDP:

   (a) $u_x = 0$.

   (b) $u_y = 0$.

   (c) $u_{xx} = 0$.

   (d) $u_x = 2xyu$.

(e) $u_{xy} = u_y$ (realiza el cambio $u_y = p$).

(Solución. (a) $u(x,y) = f(y)$; (b)$u(x,y) = g(x)$; (c) $u(x,y) = x\, f(y) + g(y)$; (d) $u(x,y) = f(y)e^{x^2 y}$; (e) $u(x,y) = f(y)\, e^x + g(x)$**).**

5. Resuelve el problema $u_y = \cos x$ con la condición $u(x,1) = 0$.
(Solución. $u(x,y) = (y-1)\cos x$**).**

5.4. Clasificación

En esta sección nos centramos en la clasificación de las EDP de segundo orden, que tienen mayor interés en el campo de la ingeniería y cuyas soluciones estudiaremos en el siguiente tema. Una EDP de segundo orden lineal tiene la forma general:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + f\, u = 0, \qquad (5.3)$$

donde a, b, c, d, e y f pueden ser constantes o funciones de x e y. Las variables x, y pueden cambiarse por las variables x, t. Esta forma se asemeja a la ecuación general de la cónica:

$$a\, x^2 + 2b\, x\, y + c\, y^2 + d\, x + e\, y + f = 0,$$

que representa una elipse, una parábola o una hipérbola según $b^2 - a\, c$ sea negativo, cero o positivo, respectivamente. Para las EDP damos una clasificación semejante.

■ **Definición 5.3.** Diremos que la EDP (5.3) es:

- **Elíptica:** si $b^2 - a\, c < 0$.
- **Parabólica:** si $b^2 - a\, c = 0$.
- **Hiperbólica:** si $b^2 - a\, c > 0$.

⬢ **Ejemplo 5.4.** (a) La **ecuación de ondas**:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

es de tipo hiperbólico ya que $b^2 - a\, c = c^2 > 0$ (no confundir la c de la EDP general (5.3) con el parámetro c de la ecuación de ondas).
(b) La **ecuación de Laplace** de dos variables:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

es de tipo elíptico ya que $b^2 - a\, c = -1 < 0$.
(c) La **ecuación del calor**:

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

es de tipo parabólico puesto que $b^2 - a\, c = 0$.

TEMA 6

Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

6.1. Introducción

En este tema estudiaremos los prototipos de las EDP de segundo orden lineales que introdujimos en el tema anterior: **la ecuación de ondas** (tipo hiperbólico), **la ecuación del calor** (tipo parabólico) y **la ecuación de Laplace** (tipo elíptico). Para ello, introduciremos en primer lugar la teoría necesaria de series de Fourier y el método de separación de variables para resolver EDP. A modo de apéndice, encontraremos también diversos resultados para profundizar en el estudio de las series de Fourier.

Nuestros objetivos serán:

- Tener los conocimientos básicos de series de Fourier.
- Conocer el método de separación de variables y aplicarlo a la resolución de las EDP anteriores.
- Resolver la ecuación de ondas unidimensional (tipo hiperbólico).
- Resolver la ecuación del calor unidimensional (tipo parabólico).
- Resolver la ecuación de Laplace bidimensional (tipo elíptico).

6.2. Series de Fourier

En diversos problemas que surgen en física e ingeniería, aparecen funciones periódicas que trataremos de representar en términos de funciones periódicas simples mediante series de Fourier.

En primer lugar, recordaremos algunas cuestiones básicas de funciones, series y trigonometría.

6.2.1. Resultados básicos

■ **Definición 6.1.** Diremos que una función $f(x)$ definida en el intervalo $[-L, L]$, con $L > 0$ es una:

(a) **función par** si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$,

(b) **función impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-L, L]$.

■ **Definición 6.2.** Se dice que una función $f(x)$ es **periódica** si está definida para todo x real y si existe un número $p > 0$ tal que:

$$f(x + p) = f(x).$$

A p se le llama **periodo** de $f(x)$.

La gráfica de una función periódica se obtiene por repetición periódica de su gráfica en cualquier intervalo de longitud p (ver Figura 6.1).

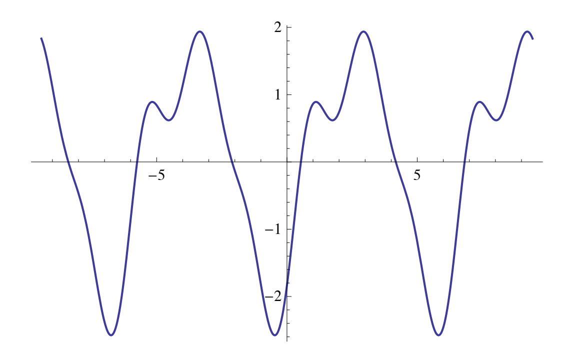


Figura 6.1: Función periódica.

⬢ **Ejemplo 6.1.** Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $f(x) = \cos x$ son periódicas de periodo $p = 2\pi$. Normalmente nos referimos al periodo como el menor p que cumple la condición de la definición de periodo. Sin embargo, también podemos considerar que $p = 4\pi$ es un periodo de las funciones anteriores.

Ejemplos de funciones que no son periódicas son $f(x) = x^2$, $f(x) = \ln x$ o $f(x) = e^x$. Sin embargo, la función definida como $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 1]$ y repetida de forma periódica es una función periódica con periodo $p = 2$. ■

■ **Definición 6.3.** Dada una sucesión de funciones $(f_n(x))$, podemos considerar la sucesión de sumas dada por:

$$S_1(x) = f_1(x)$$

$$S_2(x) = f_1(x) + f_2(x) = \sum_{n=1}^{2} f_n(x)$$

$$S_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = \sum_{n=1}^{3} f_n(x)$$

Y, así sucesivamente, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, consideramos:

$$S_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x).$$

Para cada x podemos calcular, si existe, el límite de la sucesión $S_k(x)$, que se denota por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Esta expresión se denomina serie de funciones o simplemente **serie**. Una serie se dice que es convergente en el punto x si lo es la sucesión de sumas en ese punto, es decir, si existe el límite de las sumas en ese punto.

⬢ **Ejemplo 6.2.** La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es convergente en todo $x \in \mathbb{R}$. Además, esta serie coincide con e^x.

■ **Nota 6.1.** En este tema, trabajaremos con series que serán convergentes en todos los puntos donde estén definidas. ■

Para simplificar algunos cálculos durante todo el tema, recordamos algunos resultados básicos de trigonometría:

■ **Nota 6.2.** Se tiene que:

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$

b) $\cos \alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

c) $\operatorname{sen} \alpha = (-1)^{n+1} \Longleftrightarrow \alpha = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

d) $\cos \alpha = (-1)^n \Longleftrightarrow \alpha = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$ ■

6.2.2. Series de Fourier en el intervalo $[0, \pi]$

■ **Definición 6.4.** A cada función $f(x)$ definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ le podemos asociar una serie de la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right) \tag{6.1}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \cdots$ y $b_1, b_2, \cdots$ son constantes reales que vienen dadas por las fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \tag{6.2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx. \tag{6.3}$$

A la serie se le denomina **serie de Fourier de** $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y a las constantes, coeficientes de Fourier. Suele denotarse así:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right).$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Al conjunto de funciones:

$$1, \ \cos x, \ \operatorname{sen} x, \ \cos(2x), \ \operatorname{sen}(2x), \ \cdots \tag{6.4}$$

se le denomina **sistema trigonométrico**. Todas las funciones de este conjunto son periódicas de periodo 2π y, por tanto, la serie de Fourier también lo será.

■ **Nota 6.3.** La deducción de las fórmulas para el cálculo de los coeficientes a_n y b_n puede estudiarse con mayor profundidad en la sección 6.8.3 del apéndice 6.8 de este capítulo. ■

Funciones impares

■ **Proposición 6.1.** Si $f(x)$ es una función impar en el intervalo $[-\pi, \pi]$, entonces se cumple que $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$ en su serie de Fourier y tendremos que:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx).$$

Además, los coeficientes b_n pueden calcularse así:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx. \tag{6.5}$$

■ **Proposición 6.2.** Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[0, \pi]$ puede extenderse a una función impar en el intervalo $[-\pi, \pi]$ definiendo $f(-x) = -f(x)$ para todo $-\pi \ \leq \ x < \ 0$.

De la proposición 6.2, deducimos que una función $f(x)$ definida en el intervalo $[0, \pi]$ puede extenderse a una función impar en $[-\pi, \pi]$ y a esta función podemos asociarle la serie de Fourier de la proposición 6.1:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

con los coeficientes b_n dados por la expresión (6.5).

⬣ **Ejemplo 6.3.** Escribe la serie de Fourier de la extensión impar de la función $f(x) = 1$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución. Tendremos que:

$$1 \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

donde:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = -\frac{2}{n\pi} (cos(n\pi) - \cos 0) = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

y, por tanto,

$$1 \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \operatorname{sen}(nx) = \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen}(3x) + \frac{4}{5\pi} \operatorname{sen}(5x) + \cdots \quad ■$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Funciones pares

■ **Proposición 6.3.** Si $f(x)$ es una función par en el intervalo $[-\pi,\pi]$, se tiene que $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tendremos que:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx).$$

Además, los coeficientes a_n pueden calcularse así:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \tag{6.6}$$

■ **Proposición 6.4.** Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[0,\pi]$ puede extenderse a una función par en el intervalo $[-\pi,\pi]$ definiendo $f(-x) = f(x)$ para todo $-\pi \leq x < 0$.

De la proposición 6.4, deducimos que una función $f(x)$ definida en el intervalo $[0,\pi]$ puede extenderse a una función par en $[-\pi,\pi]$ y a esta función podemos asociarle la serie de Fourier de la proposición 6.3:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

con los coeficientes a_n dados por la expresión (6.6).

⬢ **Ejemplo 6.4.** Escribe la serie de Fourier de la extensión par de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[0,\pi]$.

Solución. Tendremos que:

$$x \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

donde:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \begin{vmatrix} u = x & du = 1\ dx \\ dv = \cos(nx)dx & v = \frac{\mathrm{sen}(nx)}{n} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x\,\mathrm{sen}(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\mathrm{sen}(nx)}{n}dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x\,\mathrm{sen}(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\left[\cos(nx)\right]_0^{\pi}\right) =$$

$$\frac{2}{\pi}\left(0 - 0 + \frac{1}{n^2}(\cos(n\pi) - cos(0))\right) = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}$$

y, por tanto,

$$x \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}\cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{9\pi}\cos(3x) - \frac{4}{25\pi}\cos(5x) + \cdots \quad ■$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

6.2.3. Series de Fourier en el intervalo $[0, L]$

Ahora consideramos funciones $f(x)$ definidas en un intervalo $[0, L]$ para $L > 0$. Al igual que ocurre en el intervalo $[0, \pi]$, la función $f(x)$ puede expresarse como suma de funciones periódicas más simples.

Definición 6.5. A cada función $f(x)$ definida en el intervalo $[-L, L]$ le podemos asociar una serie de la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \tag{6.7}$$

donde $a_0, a_1, a_2, \cdots$ y $b_1, b_2, \cdots$ son constantes reales que vienen dadas por las fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{6.8}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \tag{6.9}$$

A la serie se le denomina serie de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $[-L, L]$ y a las constantes, coeficientes de Fourier. Suele denotarse así:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right).$$

Nota 6.4. Todas las funciones del conjunto:

$$1,\ \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right),\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right),\ \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right),\ \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right),\ \cdots \tag{6.10}$$

son periódicas de periodo $2L$ y, por tanto, la serie de Fourier también lo será. ■

Nota 6.5. La deducción de las fórmulas para el cálculo de los coeficientes a_n y b_n en el caso $L = \pi$ puede estudiarse con mayor profundidad en la sección 6.8.3 del apéndice 6.8 de este capítulo. ■

Funciones impares

Proposición 6.5. Si $f(x)$ es una función impar en el intervalo $[-L, L]$, entonces se cumple que $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$ en su serie de Fourier y tendremos que:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Además, los coeficientes b_n pueden calcularse así:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \tag{6.11}$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

■ **Proposición 6.6.** Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[0, L]$ puede extenderse a una función impar en el intervalo $[-L, L]$ definiendo $f(-x) = -f(x)$ para todo $-L \leq x < 0$.

Por la proposición 6.6, deducimos que una función $f(x)$ definida en el intervalo $[0, L]$ puede extenderse a una función impar en $[-L, L]$ y a esta función podemos asociarle la serie de Fourier de la proposición 6.5:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

con los coeficientes b_n dados por la expresión (6.11).

Ejemplo 6.5. Escribe la serie de Fourier de la extensión impar de la función $f(x) = 1$ en el intervalo $[0, 3]$.

Solución. Tendremos que $L = 3$ y nos quedará:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

donde:

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 1 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right) dx = \frac{2}{3}\frac{3}{n\pi}\left[-\cos\left(\frac{n\pi x}{3}\right)\right]_0^3 = -\frac{2}{n\pi}\left(cos(n\pi) - \cos 0\right) = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}$$

y, por tanto,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{3}\right) + \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi x}{3}\right) + \cdots$$ ∎

Funciones pares

■ **Proposición 6.7.** Si $f(x)$ es una función par en el intervalo $[-L, L]$, se tiene que $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ en su serie de Fourier y tendremos que:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Además, los coeficientes a_n pueden calcularse así:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \qquad (6.12)$$

Proposición 6.8. Una función $f(x)$ definida en el intervalo $[0, L]$ puede extenderse a una función par en el intervalo $[-L, L]$ definiendo $f(-x) = f(x)$ para todo $-L \leq x < 0$.

Por la proposición 6.8, deducimos que una función $f(x)$ definida en el intervalo $[0, L]$ puede extenderse a una función par en $[-L, L]$ y a esta función podemos asociarle la serie de Fourier de la proposición 6.7:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

con los coeficientes a_n dados por la expresión (6.12).

Ejemplo 6.6. Escribe la serie de Fourier de la extensión par de la función $f(x) = x$ en el intervalo $[0, 2]$.

Solución. Como $L = 2$, tendremos que:

$$x \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

donde:

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2.$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \left|\begin{array}{cc} u = x & du = 1\,dx \\ dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx & v = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)}{n\pi/2} \end{array}\right| =$$

$$\left(\frac{2}{n\pi}\left[x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx\right) =$$

$$\left(\frac{2}{n\pi}\left[x\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^2 + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right))\right]_0^2\right) =$$

$$\left(0 - 0 + \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - cos(0))\right) = \frac{4((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}$$

y, por tanto,

$$x \sim \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{8}{9\pi^2}\cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \cdots \quad \blacksquare$$

6.2.4. Convergencia y linealidad de la serie de Fourier

Convergencia de la serie de Fourier

Bajo ciertas condiciones, la serie de Fourier existe en todos los puntos del intervalo que consideramos y, además, coincide con $f(x)$. Es suficiente, por ejemplo, que $f(x)$ sea contínua y que existan sus derivadas laterales en cada punto. Esto prueba que en los ejercicios 6.3, 6.4, 6.5 y 6.6, la función $f(x)$ y la serie de Fourier coinciden en todos los puntos del intervalo $[0, \pi]$ y $[0, 2]$ respectivamente.

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

■ **Nota 6.6.** En los problemas que trataremos en este capítulo, consideraremos que una función coincide con su serie de Fourier en todos los puntos del intervalo en que se considere. ■

Para estudiar con mayor profundidad la convergencia de la serie de Fourier a la función, puede consultarse el anexo 6.8.1.

Linealidad

El siguiente resultado permite simplificar el cálculo de la serie de Fourier de una función en muchos casos:

■ **Teorema 6.1.** Si existen las series de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$ en un intervalo, entonces:

- Los coeficientes de Fourier de $f(x) + g(x)$ son la suma de los coeficientes de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$.
- Si $c \in \mathbb{R}$, los coeficientes de Fourier de $c \cdot f(x)$ son el producto de c por los coeficientes de Fourier de $f(x)$.

Ejemplo 6.7. Escribe la serie de Fourier de la extensión impar de la función $f(x) = 4 + 5\,\text{sen}(3x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución. Aplicamos el teorema anterior para $f(x) = 1$ y $g(x) = \text{sen}(3x)$. Tendremos que, tal como hemos visto en el ejercicio 6.3,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi} \text{sen}(nx) = \frac{4}{\pi} \text{sen}\, x + \frac{4}{3\pi} \text{sen}(3x) + \frac{4}{\pi} \text{sen}(5x) + \cdots$$

e, identificando coeficientes, tendremos que $\text{sen}(3x) = 1 \cdot \text{sen}(3x)$ así que:

$$f(x) = 4 \cdot 1 + 5 \cdot \text{sen}(3x) =$$
$$4\left(\frac{4}{\pi} \text{sen}\, x + \frac{4}{3\pi} \text{sen}(3x) + \frac{4}{\pi} \text{sen}(5x) + \cdots\right) + 5 \cdot \text{sen}(3x) =$$
$$\frac{16}{\pi} \text{sen}\, x + \left(\frac{16}{3\pi} + 5\right) \text{sen}(3x) + \frac{16}{5\pi} \text{sen}(5x) + \cdots$$ ■

■ **Nota 6.7.** Otra posibilidad para solucionar el ejercicio 6.7 es calcular directamente los coeficientes de Fourier con las fórmulas (6.5) para los b_n. Para ello, necesitamos calcular integrales del tipo:

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(2x)\,\text{sen}(nx) dx$$

que pueden hacerse mediante cambios trigonométricos. Estos cálculos pueden estudiarse en mayor profundidad en el anexo 6.8.2. ■

Problemas y cuestiones de la sección 6.2

1. Demuestra que si una función $f(x)$ es periódica de periodo p, entonces también es periódica de periodo np para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Demuestra que si $f(x)$ y $g(x)$ tienen periodo p, entonces la función $h(x) = a\,f(x) + b\,g(x)$ siendo a, b constantes, también tiene periodo p.

3. Demuestra las fórmulas (6.6) y (6.5) a partir de las fórmulas (6.2) y (6.3) respectivamente.

4. Encuentra la serie de Fourier de la extensión par de la función $f(x)$ definida en $[0, \pi]$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x < \pi/2 \\ -1 & si \quad \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

(Solución. $f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \cos(n\,x)$**).**

5. **(Onda diente de sierra).** Encuentra la serie de Fourier de la función $f(x) = x + \pi$ si $-\pi < x < \pi$ y f es periódica de periodo 2π.

(Solución. $f(x) \sim \pi + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(nx)$**).**

6. Encuentra la serie de Fourier de las extensiones pares de las siguientes funciones en el intervalo $[0, \pi]$:

   (a) $f(x) = \begin{cases} k & si \quad 0 \leq x < \pi/2 \\ 0 & si \quad \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$ para k constante.

   (b) $f(x) = 3x$.

(Solución. (a) $f(x) \sim \dfrac{k}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{n\pi} \cos(nx)$,

(b) $f(x) \sim \dfrac{3\pi}{2} - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\pi(2n-1)^2} \cos\left((2n-1)x\right)$**).**

7. Encuentra la serie de Fourier de la extensión par y de la extensión impar de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 5]$.

(Solución. $f(x) \sim \dfrac{50}{6} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(nx)$

$f(x) \sim \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} -50 \left(\frac{2(1-(-1)^n)}{n^3\pi^3} + \frac{(-1)^n}{n\pi} \right) \operatorname{sen}(nx)$**).**

6.3. Método de separación de variables

El **método de separación de variables** es una técnica que permite encontrar algunas soluciones $u(x, y)$ de ciertas EDP. El método consiste en buscar soluciones que sean producto de una función de x por una función de y, es decir, que sean de la forma:

$$u(x, y) = F(x)\, G(y),$$

siendo $F(x)$ y $G(y)$ funciones desconocidas. Las derivadas parciales vendrán dadas por las expresiones:

$$u_x = F'(x)G(y) \quad \text{o} \quad u_y = F(x)G'(y)$$

y la derivada segunda u_{xx}, por ejemplo, vendrá dada por $u_{xx} = F''(x)G(y)$.

Cuando sustituimos en la EDP, llegamos a dos EDO, una por cada cada una de las variables. Las resolvemos, obteniendo expresiones para $F(x)$ y $G(y)$ y, por tanto, para $u(x, y)$. Este método será imprescindible para resolver la ecuación de ondas, la del calor y la de Laplace.

⬢ **Ejemplo 6.8.** Encuentra soluciones $u(x, y)$ de la EDP $u_x - u_y = 0$ utilizando el método de separación de variables.

Solución. Consideramos soluciones de la forma $u(x, y) = F(x)G(y)$. La ecuación del enunciado se traducirá a $F'(x)G(y) = F(x)G'(y)$ que se transforma en:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{G'(y)}{G(y)}.$$

Fijémonos que, en esta igualdad, el término de la izquierda no depende de la variable y y el término de la derecha no depende de la variable x. La única posibilidad para que esto ocurra es que los dos términos sean igual a una constante k, así que:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{G'(y)}{G(y)} = k.$$

Resolviendo de manera independiente, tendremos dos EDO de primer orden:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = k \Rightarrow F'(x) - kF(x) = 0 \Rightarrow F(x) = C_1 e^{kx}$$

$$\frac{G'(y)}{G(y)} = k \Rightarrow G'(y) - kG(y) = 0 \Rightarrow G(y) = C_2 e^{ky}$$

así que:

$$u(x, y) = F(x)G(y) = C_1 e^{kx} C_2 e^{ky} = C_1 C_2 e^{k(x+y)}$$

y, renombrando $C = C_1 C_2$, tendremos que:

$$u(x, y) = Ce^{k(x+y)}\ ,\ C \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

■ **Teorema 6.2 (Principio de superposición).** Si $u_1, u_2, \cdots, u_n$ es un conjunto de soluciones de una EDP lineal homogénea, entonces cualquier combinación lineal de la forma:

$$C_1 u_1 + C_2 u_2 + \cdots + C_n u_n$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes arbitrarias, también es solución de la EDP.

■ **Nota 6.8.** Bajo ciertas condiciones, al tomar series en vez de sumas, se sigue conservando el principio de superposición. Así, si $u_1, u_2, \ldots$ es una sucesión de soluciones de una EDP lineal homogénea, $C_1, C_2, \ldots$ son constantes y la serie:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n$$

es convergente, entonces la función u también será solución de la EDP. En el resto del capítulo supondremos que siempre podemos construir una solución como ésta a partir de un conjunto de soluciones. ■

Problemas y cuestiones de la sección 6.3

1. Halla soluciones $u(x, y)$ de las EDP siguientes por el método de separación de variables:

   (a) $y\, u_x - x\, u_y = 0$.

   (b) $u_x - y\, u_y = 0$.

   (c) $u_{xy} - u = 0$.

   (d) $x^2\, u_{xy} + 3y^2\, u = 0$.

   (Solución. (a) $u(x, y) = C\, e^{k/2(x^2+y^2)}$, (b) $u(x, y) = C\, e^{kx} y^k$, (c) $u(x, y) = C\, e^{kx+y/k}$, (d) $u(x, y) = C\, e^{-k/x-y^3/k}$**).**

2. Indica si en las siguientes EDP se puede aplicar el método de separación de variables. En caso afirmativo, encuentra las EDO correspondientes (sin resolverlas):

   (a) $x\, u_{xx} + u_t = 0$.

   (b) $t\, u_{xx} + x\, u_{tt} = 0$.

   (c) $[p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0$.

   (d) $u_{xx} + (x + y)u_{yy} = 0$.

   (e) $u_{xx} + u_{yy} + x\, u = 0$.

   (Solución. (a) $x\, F'' - k\, F = 0$; $G' + k\, G = 0$, (b) $F'' - k\, x\, F = 0$; $G'' + k\, t\, G = 0$, (c) $(p\, F')' - k\, (r\, F) = 0$; $G'' - k\, G = 0$, (d) No se puede aplicar el método, (e) $F'' + (x - k)F = 0$, $G'' + k\, G = 0$**).**

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

6.4. Ecuación de ondas

La **ecuación de ondas** fue uno de los problemas matemáticos más importantes de mediados del siglo XVIII y fue estudiada por primera vez por D'Alambert en 1746. Imaginemos una cuerda tensada de longitud L en posición horizontal que se fija en sus extremos ($x = 0$ y $x = L$), por ejemplo, la cuerda de una guitarra. Hacemos vibrar la cuerda en el instante $t = 0$ desde una posición determinada y con un impulso determinado. Denotaremos con $u(x,t)$ la deflexión de la cuerda, es decir, el desplazamiento vertical en cualquier punto de la cuerda $0 \leq x \leq L$ en el instante $t \geq 0$. Bajo ciertos supuestos físicos, la EDP que modeliza este problema viene dada por:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{6.13}$$

donde c es un número real. Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación de ondas unidimensional**. Como ya comentamos en el tema anterior, es una EDP lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes de tipo hiperbólico. Al añadir una variable espacial, podríamos considerar la ecuación de ondas bidimensional, pero en este libro sólo consideraremos el caso unidimensional.

Dado que la cuerda está fija en los extremos $x = 0$ y $x = L$, en nuestro problema tendremos dos condiciones de frontera del tipo:

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{6.14}$$

Tendremos también dos condiciones iniciales (en $t = 0$):

- La deflexión inicial: $u(x,0) = f(x)$
- La velocidad inicial: $u_t(x,0) = g(x)$

Por tanto, el problema consiste en encontrar una solución de la ecuación (6.13) que satisfaga las condiciones de frontera (6.14) y las condiciones iniciales anteriores:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{(condiciones de frontera)} \\ u(x,0) = f(x); \quad u_t(x,0) = g(x) & \text{(condiciones iniciales)} \end{cases} \tag{6.15}$$

Para resolver este problema procedemos paso a paso de la forma siguiente:

- **Paso 1.** Aplicamos el método de separación de variables a la ecuación (6.13).
- **Paso 2.** Al resolver el problema por separación de variables, obtendremos soluciones de la EDO en la variable x que satisfacen las condiciones de frontera (6.14) y se determinan las soluciones de la EDO en la variable t.
- **Paso 3.** La solución del problema será una serie que resulta de la suma de las soluciones anteriores. Se usarán las condiciones iniciales y el cálculo de coeficientes de series de Fourier para llegar a la solución del problema (6.15).

Paso 1. Separación de variables. Dos EDO

Aplicamos el método de separación de variables a la ecuación de ondas (6.13). Buscamos soluciones de la forma:

$$u(x,t) = F(x)\,G(t). \tag{6.16}$$

Derivamos (6.16) y obtenemos, obviando las variables independientes para simplificar:

$$u_{tt} = F\,G'' \quad \text{y} \quad u_{xx} = F''\,G.$$

Sustituimos estas expresiones en la EDP y obtenemos:

$$F\,G'' = c^2\,F''\,G$$

y, pasando la G y la c^2 a la izquierda y la F a la derecha, obtenemos:

$$\frac{G''}{c^2\,G} = \frac{F''}{F}. \tag{6.17}$$

Como ya vimos en el ejemplo 6.8, podemos afirmar que ambos miembros de (6.17) son constantes ya que el primero no depende de x y el segundo no depende de t. Por tanto,

$$\frac{G''}{c^2\,G} = \frac{F''}{F} = k.$$

De esta manera obtenemos dos EDO:

$$F'' - k\,F = 0 \tag{6.18}$$

y

$$G'' - c^2 k\,G = 0, \tag{6.19}$$

donde k es, por ahora, una constante arbitraria.

Paso 2. Condiciones en la frontera

Fijémonos en que si $G \equiv 0$, entonces $u(x,t) \equiv 0$, solución trivial, que no es la solución del problema salvo que las condiciones iniciales sean todas 0. Consideramos, por tanto, que $G \neq 0$. Se determinarán ahora las soluciones F y G de (6.18) y (6.19) de manera que $u = F\,G$ satisfaga las condiciones de frontera (6.14):

$$\begin{aligned} u(0,t) &= F(0)G(t) = 0, \\ u(L,t) &= F(L)G(t) = 0. \end{aligned}$$

(1) Resolvemos en primer lugar la EDO $F'' - k\,F = 0$. En ese caso, tendremos que:

$$u(0,t) = 0 \longrightarrow F(0)G(t) = 0 \xrightarrow{G\neq 0} F(0) = 0 \tag{6.20}$$

$$u(L,t) = 0 \longrightarrow F(L)G(t) = 0 \xrightarrow{G\neq 0} F(L) = 0 \tag{6.21}$$

obteniendo dos condiciones para $F(x)$. Ahora distinguimos tres casos para $F'' - kF = 0$:

- Si $k = 0$: La EDO queda $F'' = 0$ cuya solución general es $F(x) = ax + b$ y, teniendo en cuenta las condiciones (6.20) y (6.21), obtenemos que $a = b = 0$. Por tanto, $F(x) \equiv 0$, que nos lleva de nuevo a la solución trivial $u(x,t) \equiv 0$.
- Si $k > 0$: Podemos renombrar la variable k en forma de cuadrado $k = p^2$ y la EDO quedará $F'' - p^2 F = 0$. El polinomio característico de la EDO tiene raíces p y $-p$, así que su solución general será:

  $$F(x) = A\,e^{px} + B\,e^{-px}, \quad \text{donde} \quad A, B \quad \text{son constantes arbitrarias.}$$

  Al aplicar las condiciones (6.20) y (6.21), es fácil calcular que $A = B = 0$ y se obtiene $F(x) \equiv 0$, dando la solución trivial de nuevo, al igual que en el caso anterior.
- Si $k < 0$: Podemos renombrar la variable k en forma del negativo de un cuadrado $k = -p^2$ y la EDO quedará $F'' + p^2 F = 0$. El polinomio característico de la EDO tiene raíces complejas pi y $-pi$, así que su solución general será:

  $$F(x) = A\,\cos(px) + B\,\operatorname{sen}(px), \quad A \text{ y } B \text{ son constantes arbitrarias.}$$

  Al sustituir la condición (6.20), tendremos:

  $$F(0) = 0 \longrightarrow A\cos(0) + B\operatorname{sen}(0) = 0 \longrightarrow A = 0.$$

  Y como $A = 0$, $F(x) = B\operatorname{sen}(px)$. Al sustituir la condición (6.21), obtendremos:

  $$F(L) = 0 \longrightarrow B\operatorname{sen}(pL) = 0.$$

  Es necesario tomar $B \neq 0$ ya que de otro modo $F(x) \equiv 0$, con lo que obtendríamos otra vez el caso trivial. En consecuencia, $\operatorname{sen}(pL) = 0$. Por tanto, utilizando la Nota 6.2, obtenemos que:

  $$pL = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6.22}$$

  Para cada n, obtenemos un valor de p que podemos renombrar y denominar p_n. Nos quedamos sólo con los p_n de valores de $n \geq 1$, obteniendo:

  $$p_n = \frac{n\pi}{L}.$$

  Tomando $B = 1$, obtenemos para cada $n \geq 1$ una solución de $F(x)$ que denotaremos por $F_n(x)$:

  $$F_n(x) = \operatorname{sen}(p_n x), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6.23}$$

(2) Resolvemos ahora $G'' - c^2 k\, G = 0$. Sin embargo, la constante k está restringida ahora a los valores $k = -p_n^2 = -(n\pi/L)^2$ tal como hemos visto en la resolución de $F(x)$. Para cada n, $G'' - c^2 k\, G = 0$ quedará de la forma $G'' + c^2 p_n^2 G = 0$, cuya solución general será:

$$G_n(t) = B_n \cos(cp_n t) + B_n^* \operatorname{sen}(cp_n t),$$

donde B_n y B_n^* son constantes arbitrarias.

Por tanto, las funciones $u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$ o, escritas en forma desarrollada,

$$u_n(x,t) = (B_n\ \cos(cp_nt) + B_n^*\ \operatorname{sen}(cp_nt))\operatorname{sen}(p_nx)\,, \quad n = 1,2,\ldots \tag{6.24}$$

son soluciones de la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2u_{xx}$ que, además, cumplen las condiciones de frontera $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

Paso 3. Solución del problema completo

Una sola solución de la forma $u_n(x,t)$ que hemos encontrado en el apartado anterior no satisface, en general, las condiciones iniciales. Ahora bien, la ecuación (6.13) es lineal y homogénea y podemos aplicar el principio de superposición (teorema 6.2 y nota posterior). Tendremos que una solución al problema completo vendrá dada por la serie:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos(cp_nt) + B_n^*\operatorname{sen}(cp_nt))\operatorname{sen}(p_nx) \tag{6.25}$$

para unas constantes B_n y B_n^* determinadas. Para obtener la solución del problema que satisfaga las condiciones iniciales, sustituiremos estas condiciones en la función $u(x,t)$ y determinaremos el valor de las constantes B_n y B_n^*:

- Condición inicial $u(x,0) = f(x)$ (desplazamiento inicial):

  Sustituyendo $t = 0$ en la expresión (6.24), tenemos:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\ \operatorname{sen}(p_nx) = f(x). \tag{6.26}$$

  Por tanto, las constantes B_n serán los coeficientes de Fourier de la extensión impar de $f(x)$ en el intervalo $[0,L]$ tal como vimos en la proposición 6.5. Utilizamos la fórmula (6.11) y obtenemos:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ \operatorname{sen}(p_nx)\ dx, \quad n = 1,2,\ldots \tag{6.27}$$

- Condición inicial $u_t(x,0) = g(x)$ (velocidad inicial):

  Derivando la expresión $u(x,t)$ que hemos obtenido en (6.25) respecto de t obtenemos:

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-cp_nB_n\operatorname{sen}(cp_nt) + cp_nB_n^*\cos(cp_nt))\operatorname{sen}(p_nx) \tag{6.28}$$

  y, sustituyendo $t = 0$ en esta expresión obtendremos:

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} cp_nB_n^*\operatorname{sen}(p_nx) = g(x).$$

Por tanto, los coeficientes de Fourier de la extensión impar de $g(x)$ vendrán dados por:

$$cp_n B_n^* = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}(p_n x)\, dx$$

y, despejando B_n^*, obtendremos:

$$B_n^* = \frac{2}{cp_n L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}(p_n x)\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6.29}$$

Resumiendo, la solución de nuestro problema vendrá dada por la expresión:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos(cp_n t) + B_n^* \operatorname{sen}(cp_n t)) \operatorname{sen}(p_n x),$$

donde los coeficientes B_n y B_n^* vienen dados por las expresiones:

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(p_n x)\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

y

$$B_n^* = \frac{2}{cp_n L} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}(p_n x)\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \quad \blacksquare$$

■ **Nota 6.9.** En el caso $k = -p^2$, se obtienen básicamente las mismas soluciones para $F(x)$ cuando tomamos $n \leq 0$ excepto por un signo menos ya que $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$. Por tanto, no es necesario incluirlas en la solución. ■

Las soluciones $u_n(x,t)$ en la ecuación de ondas y también en la ecuación del calor y de Laplace que veremos en las siguientes secciones, se denominan **funciones características** de la EDP. Los valores p_n se llaman **valores característicos**.

■ **Nota 6.10.** En la resolución del problema de la ecuación de ondas, hemos utilizado una condición de frontera del tipo $u(0,t) = u(L,t)$ pero podemos generalizar esta condición, obteniendo cuatro posibilidades:

(a) $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

(b) $u(0,t) = u_x(L,t) = 0$.

(c) $u_x(0,t) = u(L,t) = 0$.

(d) $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$.

Dependiendo del tipo de condición, el paso 2 puede variar ligeramente, cambiando la forma de la función $F(x)$ y de los valores p_n. Veremos esto en mayor profundidad con ejemplos más concretos tanto en la ecuación de ondas como en la ecuación del calor en la sección 6.6. ■

⬢ **Ejemplo 6.9.** Resuelve la ecuación de ondas $u_{tt} = 4u_{xx}$ en el intervalo $[0, 6]$ cuyas condiciones de frontera son $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ y donde las condiciones iniciales vienen dadas por:

$$u(x, 0) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{6}\right) - 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi x}{6}\right) \quad , \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Solución. Viendo el proceso anterior y teniendo en cuenta que $c^2 = 4$ y $L = 6$, tendremos que la solución de nuestro problema vendrá dada por la expresión:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos(2p_n t) + B_n^* \,\mathrm{sen}(2p_n t))\,\mathrm{sen}\,(p_n x)\,,$$

donde $p_n = \dfrac{n\pi}{6}$ para todo $n = 1, 2, \cdots$. Para el cálculo de los B_n, evitaremos hacer las integrales correspondientes ya que podemos identificar directamente la función $u(x, 0)$ con su serie de Fourier. Puesto que para todo x tendremos:

$$u(x, 0) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}x\right) - 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{6}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{6}x\right)$$

se obtiene que:

$$B_1 \,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}x\right) + B_2 \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{6}x\right) + B_3 \,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{6}x\right) + \cdots = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}x\right) - 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{6}x\right)$$

así que, identificando coeficientes, $B_1 = 2$, $B_3 = -3$ y $B_n = 0$ si $n \neq 1, 3$. Para el cálculo de los B_n^*, como:

$$c p_n B_n^* = \frac{2}{6} \int_0^L 0\,\mathrm{sen}\,(p_n x)\, dx = 0,$$

obtenemos que $B_n^* = 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ Por tanto, la solución del problema será:

$$u(x, t) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{6}t\right) \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}x\right) - 3\cos\left(\frac{6\pi}{6}t\right) \mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{6}x\right). \quad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 6.4

1. Resuelve la ecuación de ondas $u_{tt} = u_{xx}$ en el intervalo $[0, \pi]$ cuyas condiciones de frontera son $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ y con las siguientes condiciones iniciales:

   (a) $u(x, 0) = 0$ y $u_t(x, 0) = 4\,\mathrm{sen}(2x)$.

   (b) $u(x, 0) = 3\,\mathrm{sen}\, x$ y $u_t(x, 0) = -6\,\mathrm{sen}\, x$.

   (c) $u(x, 0) = 0$ y $u_t(x, 0) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & si \quad \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

(Soluciones: (a) $u(x,t) = 2\,\text{sen}(2t)\,\text{sen}(2x)$,
(b) $u(x,t) = 3\,\text{sen}\,x(\cos t - 2\,\text{sen}\,t)$,
(c) $u(x,t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^3}\,\text{sen}(nt)\,\text{sen}(nx)$**)**.

2. Resuelve la ecuación de ondas $u_{tt} = 9u_{xx}$ en el intervalo $[0,2]$ cuyas condiciones de frontera son $u(0,t) = u(2,t) = 0$ y con las condiciones iniciales $u(x,0) = \frac{1}{4}x(2-x)$, $u_t(x,0) = 0$.

   (Solución. $u(x,t) = \dfrac{4}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^3}\right)\cos\left(\frac{3n\pi}{2}t\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$**)**.

6.5. Ecuación del calor

La **ecuación del calor** describe la distribución del calor en una región a lo largo del tiempo. Imaginemos una varilla de longitud $L > 0$ en posición horizontal cuya temperatura es nula en sus extremos ($x = 0$ y $x = L$). Inicialmente, en el instante $t = 0$ la varilla tiene una temperatura determinada en cada posición $0 \leq x \leq L$. Denotaremos por $u(x,t)$ la temperatura de la varilla, es decir, la temperatura en cualquier posición de la varilla $0 \leq x \leq L$ en el instante $t \geq 0$. La EDP que modeliza este problema se obtiene a partir de la Ley de Fourier y del principio de conservación de la energía y viene dada por:

$$u_t = c^2 u_{xx} \tag{6.30}$$

donde c es un número real. Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación del calor unidimensional**. Como ya comentamos en el tema anterior, se trata de una EDP lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes de tipo parabólico. Al añadir variables espaciales, podríamos considerar la ecuación del calor bidimensional o tridimensional pero en este libro sólo consideraremos el caso unidimensional.

Dado que la varilla tiene temperatura nula en los extremos $x = 0$ y $x = L$, tendremos dos condiciones de frontera del tipo:

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{6.31}$$

Tendremos también una condición inicial dada por la temperatura en $t = 0$:

$$u(x,0) = f(x). \tag{6.32}$$

Por tanto, el problema consiste en encontrar una solución de (6.30) que satisfaga las condiciones de frontera (6.31) y la condición inicial (6.32):

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0; \quad \text{(condiciones de frontera)} \\ u(x,0) = f(x); \qquad\qquad \text{(condición inicial)} \end{cases} \tag{6.33}$$

Para resolver este problema procedemos paso a paso de manera muy similar a la ecuación de ondas de la sección anterior:

- **Paso 1.** Aplicamos el método de separación de variables a la ecuación (6.30).

- **Paso 2.** Al resolver el problema por separación de variables, obtendremos soluciones de la EDO en la variable x que satisfacen las condiciones de frontera (6.31) y se determinan las soluciones de la EDO en la variable t.

- **Paso 3.** La solución del problema será una serie que resulta de la suma de las soluciones anteriores. Se usará la condición inicial (6.32) y el cálculo de coeficientes de series de Fourier para llegar a la solución del problema (6.33).

Paso 1. Separación de variables. Dos EDO

Aplicamos el método de separación de variables a la ecuación del calor (6.30). Buscamos soluciones de la forma:

$$u(x,t) = F(x)\,G(t). \tag{6.34}$$

Derivamos (6.34) y obtenemos, obviando las variables independientes para simplificar:

$$u_t = F\,G' \quad \text{y} \quad u_{xx} = F''\,G.$$

Sustituimos estas expresiones en la EDP, obteniendo:

$$F\,G' = c^2\,F''\,G$$

y pasando la G y la c^2 a la izquierda y la F a la derecha, obtenemos:

$$\frac{G'}{c^2\,G} = \frac{F''}{F}. \tag{6.35}$$

Como ya vimos en el ejemplo 6.8, podemos afirmar que ambos miembros de (6.35) son constantes ya que el primero no depende de x y el segundo no depende de t. Por tanto,

$$\frac{G'}{c^2\,G} = \frac{F''}{F} = k.$$

De esta manera obtenemos dos EDO:

$$F'' - k\,F = 0 \tag{6.36}$$

y

$$G' - c^2 k\,G = 0, \tag{6.37}$$

donde k es, por ahora, una constante arbitraria.

Paso 2. Condiciones en la frontera

La primera parte se razona de manera análoga que en la ecuación de ondas. La única posibilidad para obtener soluciones no triviales es que $G \neq 0$. Se determinarán ahora las soluciones F y G de (6.36) y (6.37) de manera que $u = F\,G$ satisfaga las condiciones de frontera (6.34):

$$u(0,t) = F(0)G(t) = 0,$$
$$u(L,t) = F(L)G(t) = 0.$$

(1) La resolución de $F'' - k\,F = 0$ se hace de manera idéntica a como lo hicimos en la ecuación de ondas, obteniendo soluciones no triviales únicamente si $k = -p_n^2$, donde:

$$p_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{para todo} \ \ n = 1, 2, \ldots$$

Y las soluciones para $F(x)$ vienen dadas por:

$$F_n(x) = \operatorname{sen}(p_n x)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6.38}$$

(2) Resolvemos ahora $G' - c^2 k\,G = 0$. Sin embargo, la constante k está restringida ahora a los valores $k = -p_n^2 = -(n\pi/L)^2$ tal como hemos visto en la resolución de $F(x)$. Para cada n, $G' - c^2 k\,G = 0$ quedará de la forma $G' + c^2 p_n^2 G = 0$ que es una EDO lineal de primer orden cuyo polinomio característico es $r + c^2 p_n^2 = 0$ y cuya única raíz simple es $r = -c^2 p_n^2$. Su solución será, por tanto,

$$G_n(t) = B_n e^{-c^2 p_n^2 t},$$

donde B_n es una constante arbitraria.

Por tanto, las funciones $u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$ o, escritas en forma desarrollada,

$$u_n(x,t) = B_n e^{-c^2 p_n^2 t} \operatorname{sen}(p_n x)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6.39}$$

son soluciones de la ecuación del calor $u_t = c^2 u_{xx}$ que además cumplen las condiciones de frontera $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

Paso 3. Solución del problema completo

Una sola solución de la forma $u_n(x,t)$ que hemos encontrado en el apartado anterior no satisface, en general, las condiciones iniciales. Ahora bien, la ecuación (6.30) es lineal y homogénea y podemos aplicar el principio de superposición (teorema 6.2 y nota posterior). Tendremos que una solución al problema completo vendrá dada por la serie:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-c^2 p_n^2 t} \operatorname{sen}(p_n x) \tag{6.40}$$

para unas constantes B_n determinadas. Para obtener la solución del problema que satisfaga la condición inicial, sustituiremos esta condición en la función $u(x,t)$ y determinaremos el valor de las constantes B_n. Como tal condición es $u(x,0) = f(x)$ (temperatura inicial), sustituyendo $t = 0$ en la expresión (6.40), tenemos:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \ \text{sen}\,(p_n x) = f(x). \qquad (6.41)$$

Por tanto, las constantes B_n serán los coeficientes de Fourier de la extensión impar de $f(x)$ en el intervalo $[0, L]$ tal como vimos en la proposición 6.5. Utilizamos la fórmula (6.11) y obtenemos:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \ \text{sen}\,(p_n x) \ dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (6.42)$$

Resumiendo, la solución de nuestro problema vendrá dada por la expresión:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-c^2 p_n^2 t}\, \text{sen}\,(p_n x)\,,$$

donde los coeficientes B_n vienen dados por las expresiones:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \ \text{sen}\,(p_n x) \ dx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

■ **Nota 6.11.** Al igual que en la ecuación de ondas, en el caso $k = -p^2$, se obtienen básicamente las mismas soluciones para $F(x)$ cuando tomamos $n \leq 0$, y $k < 0$ excepto por un signo menos ya que $\text{sen}\,(-\alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$. Por tanto, no es necesario incluirlas en la solución.

■ **Nota 6.12.** También al igual que en la ecuación de ondas, en el ejemplo que hemos dado de la resolución del problema de la ecuación del calor, hemos utilizado una condición de frontera del tipo $u(0,t) = u(L,t)$ pero podemos generalizar esta condición, obteniendo cuatro posibilidades:

(a) $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

(b) $u(0,t) = u_x(L,t) = 0$.

(c) $u_x(0,t) = u(L,t) = 0$.

(d) $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$.

En la resolución hemos considerado la condición a) pero, dependiendo del tipo de condición, el paso 2 puede variar ligeramente, cambiando la forma de la función $F(x)$ y de los valores p_n. Como ya indicamos en la ecuación de ondas, veremos esto en mayor profundidad con ejemplos más concretos en la sección 6.6. ■

⬢ **Ejemplo 6.10.** Resuelve la ecuación del calor $u_t = 9u_{xx}$ en el intervalo $[0, \pi]$ cuyas condiciones de frontera son $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y donde la condición inicial viene dada por $u(x,0) = 4$ para todo $0 \leq x \leq \pi$ y $t > 0$.

Solución. Aplicando el proceso anterior, teniendo en cuenta que $L = 4$, obtendremos que la solución del problema viene dada por una expresión del tipo:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-9p_n^2 t} \operatorname{sen}(p_n x) .$$

donde $p_n = n$ para todo $n = 1, 2, \cdots$. Para determinar los B_n, tendremos que:

$$u(x,0) = 4 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(p_n x)$$

y tendremos que:

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 4 \operatorname{sen}(p_n x) dx = \frac{8}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

y, por tanto, la solución será:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n\pi} (1 - (-1)^n) e^{-9n^2 t} \operatorname{sen}(nx) .$$

Si expresamos los primeros términos de la serie, quedará:

$$u(x,t) = \frac{16}{\pi} e^{-9t} \operatorname{sen}(x) + \frac{16}{\pi} e^{-81t} \operatorname{sen}(3x) + \cdots \qquad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 6.5

1. Resuelve los siguientes problemas de ecuación del calor:

   (a) $u_t = 5\, u_{xx}$ en el intervalo $[0, \pi]$ con las condiciones de frontera $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y condición inicial $u(x,0) = 3\ \operatorname{sen}(2x)$.

   (b) $3u_t = u_{xx}$ en el intervalo $[0, 2]$ con las condiciones de frontera $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$ y condición inicial $u(x,0) = \cos^2(2\pi x)$.

   (Solución. (a) $u(x,t) = 3e^{-20t} \operatorname{sen}(2x)$,
   (b) $u(x,t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} e^{-48\pi^2 t} \cos(4\pi x)$**).**

2. **Enuncia** el problema con valores en la frontera que determina la temperatura en una barra de cobre de 1 m. de longitud, si, originalmente, toda la barra se encuentra a 18^{o}C y uno de sus extremos se calienta de modo repentino hasta 60^{o}C y se mantiene a esa temperatura, mientras que el otro extremo se conserva a 24^{o}C. (considera que $c^2 = 2$)

   (Solución. $u_t = 2\, u_{xx}$ en el intervalo $[0, 1]$ con las condiciones de frontera y condición inicial $u(x,0) = 18$**).**

ISBN: 978-84-17429-33-1
Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

6.6. Condiciones de frontera distintas

En esta sección estudiaremos la ecuación de ondas y la ecuación del calor en el caso en que obtengamos condiciones de frontera distintas a las estudiadas en las secciones anteriores. Tal como indicamos en las notas 6.10 y 6.12, podemos cambiar las condiciones $u(0,t) = u(L,t) = 0$. Para poder resolver el problema de manera completa con otras condiciones, necesitaremos trabajar con una **generalización de las series de Fourier** que explicamos en el siguiente teorema:

Teorema 6.3 (**Generalización de las series de Fourier**).

Si $p_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2L}$, entonces:

(a) Para $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(p_n x)$ tenemos que:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(p_n x)dx$$

(b) Para $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(p_n x)$ tenemos que:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}(p_n x)dx$$

Al igual que ocurre con los coeficientes de Fourier, los números a_n y b_n también cumplen la condición de linealidad.

6.6.1. Ecuación del calor

En la ecuación del calor, las condiciones anteriores se referían a tener una temperatura constante y nula. Sin embargo, podríamos considerar el caso en que tengamos los extremos de la varilla aislados, es decir, que no haya flujo de calor en los extremos de la varilla, lo que se traduce en que $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$. La posibilidad de tener un extremo aislado y el otro con temperatura cero nos da las otras dos opciones en las condiciones de frontera.

Para resolver el problema de la ecuación del calor cambiando las condiciones de frontera se procede de manera análoga a la sección 6.5 teniendo en cuenta algunos cambios que se resumen en la siguiente proposición:

Proposición 6.9. Consideramos la ecuación del calor $u_t = c^2 u_{xx}$ con la condición inicial $u(x,0) = f(x)$. Supongamos que $u(x,t) = F(x)G(t)$. Entonces:

(a) Si $u(0,t) = u(L,t) = 0 \to F(0) = F(L) = 0$.

(b) Si $u(0,t) = u_x(L,t) = 0 \to F(0) = F'(L) = 0$.

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

(c) Si $u_x(0,t) = u(L,t) = 0 \to F'(0) = F(L) = 0$.

(d) Si $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \to F'(0) = F'(L) = 0$.

Esto lleva, respectivamente, a que:

(a) $F_n(x) = \operatorname{sen}(p_n x)$ donde $p_n = \dfrac{n\pi}{L}$. La solución general viene dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-c^2 p_n^2 t} \operatorname{sen}(p_n x)$$

donde los B_n son los coeficientes de Fourier de la extensión impar de $f(x)$ en el intervalo $[0, L]$ que vienen dados por la fórmula (6.11) para todo $n = 1, 2, \ldots$

(b) $F_n(x) = \operatorname{sen}(p_n x)$ donde $p_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2L}$. La solución general viene dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-c^2 p_n^2 t} \operatorname{sen}(p_n x)$$

donde los B_n son los coeficientes b_n del apartado b) del teorema 6.3 para $f(x)$.

(c) $F_n(x) = \cos(p_n x)$ donde $p_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2L}$. La solución general viene dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c^2 p_n^2 t} \cos(p_n x)$$

donde los A_n son los coeficientes a_n del apartado a) del teorema 6.3 para $f(x)$.

(d) $F_n(x) = \cos(p_n x)$ donde $p_n = \dfrac{n\pi}{L}$. La solución general viene dada por:

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-c^2 p_n^2 t} \cos(p_n x)$$

donde los A_n son los coeficientes de Fourier de la extensión par de $f(x)$ en el intervalo $[0, L]$ que vienen dados por la fórmula (6.12) para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$

■ **Nota 6.13.** La notación A_n y B_n para los coeficientes se ha tomado así por identificación con los coeficientes a_n y b_n de las fórmulas de los coeficientes de las series de Fourier. En todos los casos de la proposición 6.9, al resolver la EDO $F'' - kF = 0$, las únicas soluciones no triviales aparecen para $k < 0$ salvo el caso d). En ese caso, existe una solución para $k \leq 0$ que viene dada por $F(x)$ igual a una constante. Denotamos esa constante por $A_0/2$ tal como aparece en el apartado d) de la proposición 6.9.

⬣ **Ejemplo 6.11.** Resuelve el problema $u_t = 2u_{xx}$ con las condiciones de frontera $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ y la condición inicial $u(x,0) = 2x + 5\cos(3\pi x)$.

Solución. Consideramos $u(x,t) = F(x)\, G(t)$ y obtenemos $F\, G' = 2\, F''\, G$ lo que nos da:

$$\frac{G'}{2\, G} = \frac{F''}{F} = k \ \text{ cte.}$$

Resolvemos en primer lugar la EDO $F'' - k\, F = 0$. Si $G \equiv 0$, entonces, $u(x,t) \equiv 0$, solución trivial. Consideramos, por tanto, que $G \neq 0$. En ese caso, tendremos que:

$$u_x(0,t) = 0 \longrightarrow F'(0)G(t) = 0 \overset{G\neq 0}{\longrightarrow} F'(0) = 0 \tag{6.43}$$

$$u_x(1,t) = 0 \longrightarrow F'(1)G(t) = 0 \overset{G\neq 0}{\longrightarrow} F'(1) = 0 \tag{6.44}$$

Ahora distinguimos tres casos para la EDO $F'' - kF = 0$:

- Si $k = 0$: La EDO queda $F'' = 0$ cuya solución general es $F(x) = ax + b$ y, teniendo en cuenta que $F'(0) = F'(1) = 0$, obtenemos que $a = 0$ y, por tanto, $F(x) = b$ una constante arbitraria. Esta constante aparecerá en la solución del problema renombrada como $A_0/2$.

- Si $k > 0$: Ocurre algo análogo al caso $k = 0$.

- Si $k < 0$: Podemos renombrar $k = -p^2$ y la EDO quedará $F'' + p^2 F = 0$. La solución general será:

  $$F(x) = A\, \cos(px) + B\, \text{sen}(px), \quad A \text{ y } B \text{ son constantes arbitrarias.}$$

  Para sustituir las condiciones $F'(0) = F'(1) = 0$, calculamos:

  $$F'(x) = -Ap\, \text{sen}(px) + Bp\, \cos(px)$$

  y tendremos:

  $$F'(0) = 0 \longrightarrow -Ap\,\text{sen}(0) + Bp\cos(0) = 0 \overset{p\neq 0}{\longrightarrow} B = 0.$$

  Como $B = 0$, $F(x) = A\cos(px)$. Al sustituir la condición $F'(1) = 0$, obtenemos:

  $$-Ap\,\text{sen}(p) = 0 \overset{p\neq 0}{\longrightarrow} A\,\text{sen}(p) = 0.$$

  Es necesario tomar $A \neq 0$ ya que de otro modo $F(x) \equiv 0$, con lo que obtendríamos otra vez el caso trivial. En consecuencia, $\text{sen}(p) = 0$. Por tanto, utilizando la nota 6.2, obtenemos que:

  $$p = n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \longrightarrow p_n = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6.45}$$

  Tomando $B = 1$, obtenemos para cada $n \geq 1$:

  $$F_n(x) = \cos\left(p_n x\right), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6.46}$$

Resolvemos ahora la EDO $G' + 2p_n^2\, G = 0$ cuya solución general es:

$$G_n(t) = A_n e^{-2p_n^2 t}$$

donde A_n es una constante arbitraria. Las funciones $u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = A_n e^{-2p_n^2 t} \operatorname{sen}(p_n x)$ son soluciones de la ecuación del calor que además cumplen las condiciones de frontera $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$. La solución del problema completo será:

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-2p_n^2 t} \cos(p_n x)\,.$$

Como $u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \ \cos(p_n x) = 2x + 5\cos(3\pi x)$, tendremos que:

$$\frac{A_0}{2} + A_1 \ \cos(\pi x) + A_2 \ \cos(2\pi x) + A_3 \ \cos(3\pi x) + \cdots = 2x + 5\cos(3\pi x)\,.$$

Para el cálculo de las constantes A_n tenemos dos posibilidades. La primera posibilidad es el cálculo de los coeficientes de Fourier mediante las fórmulas:

$$A_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 (2x + \cos(3\pi x))\ dx$$

y

$$A_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (2x + \cos(3\pi x))\ \cos(p_n x)\ dx.$$

Hay cierta dificultad en el cálculo de la segunda integral ya que es necesario transformar el producto de cosenos para evaluarla. Para profundizar en la resolución de estas integrales, ver la sección 6.8.2 del apéndice 6.8.

La segunda posibilidad, que es la que desarrollaremos aquí, es calcular la serie de Fourier de la extensión par de la función $2x + \cos(3\pi x)$ en $[0,1]$ utilizando la linealidad de los coeficientes tal como indicamos en el teorema 6.3. Haremos, por una parte, la serie de Fourier de la extensión par de la función $2x$ en $[0,1]$ y, por otra, la de la función $\cos(3\pi x)$.

- **Serie de Fourier de la extensión par de $2x$ en $[0,1]$:**

$$A_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 2x dx = 2\left[x^2\right]_0^1 = 2$$

$$A_n = \frac{2}{1}\int_0^1 2x\cos(n\pi x)\, dx = 4\int_0^1 x\cos(n\pi x)\, dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & du = 1\ dx \\ dv = \cos(n\pi x)\, dx & v = \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi} \end{array} \right| =$$

$$\left(\frac{4}{n\pi}\left[x\operatorname{sen}(n\pi x)\right]_0^1 - \frac{4}{n\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\, dx\right) =$$

$$\left(\frac{4}{n\pi}\left[x\operatorname{sen}(n\pi x)\right]_0^1 + \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos(n\pi x)\right]_0^1\right) =$$

$$\left(0 - 0 + \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi) - cos(0))\right) = \frac{4((-1)^n - 1)}{n^2\pi^2}$$

- **Serie de Fourier de la extensión par de** $5\cos(3\pi x)$ **en** $[0,1]$**:** Lo hacemos por identificación. Tendremos que:

$$\frac{A_0}{2} + A_1\cos(\pi x) + A_2\cos(2\pi x) + A_3\cos(3\pi x) + \cdots = 5\cos(3\pi x),$$

así que $A_3 = 5$ y $A_n = 0$ para todo $n \geq 0$, $n \neq 3$.

Por tanto, la solución vendrá dada por:

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-2p_n^2 t}\cos(p_n x).$$

donde $A_0 = 2$, $A_3 = -\frac{8}{9\pi^2} + 5$ y $A_n = \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}$ para todo $n \geq 1$, $n \neq 3$. Al desarrollar los primeros términos, tendremos:

$$u(x,t) = 1 - \frac{8}{\pi^2}e^{-2\pi t}\cos(\pi x) + \left(5 - \frac{8}{9\pi^2}\right)e^{-18\pi t}\cos(3\pi x) + \cdots \quad \blacksquare$$

Problemas y cuestiones de la sección 6.6.1

1. Resuelve el problema $u_t = u_{xx}$ en el intervalo $[0,\pi]$, cuyas condiciones de frontera vienen dadas por $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ y suponiendo que la condición inicial $u(x,0) = f(x)$ viene dada por:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x < \pi/2 \\ \pi - x & si \quad \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

   (b) $f(x) = x^2$

   (Solución. (a) $u(x,t) = \frac{\pi}{4} - \frac{8}{\pi}\left(\frac{1}{4}e^{-4t}\cos(2x) + \frac{1}{36}e^{-36t}\cos(6x) + \ldots\right)$, (b) $u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{-nt}\cos(nx)$**).**

2. Resuelve el problema $u_t = 4\,u_{xx}$ en el intervalo $[0,\pi/2]$, cuyas condiciones de frontera vienen dadas por $u_x(0,t) = u(\pi/2,t) = 0$ y suponiendo que la condición inicial es $u(x,0) = 2x - 6\cos x$.

   (Solución. $u(x,t) = \left(-2 - \frac{8}{\pi}\right)e^{-4t}\cos x +$
   $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{4}{2n-1}\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) - \frac{8}{\pi(2n-1)^2}\right)e^{-4(2n-1)^2 t}\cos((2n-1)x)$**).**

6.6.2. Ecuación de ondas

De manera análoga a la ecuación del calor, podemos cambiar también las condiciones de frontera en la ecuación de ondas. Se procede de manera análoga a la sección 6.4 teniendo en cuenta algunos cambios que se resumen en la siguiente proposición:

■ **Proposición 6.10.** Consideramos la ecuación de ondas $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ con las condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$. Supongamos que $u(x,t) = F(x)G(t)$. Entonces:

(a) Si $u(0,t) = u(L,t) = 0 \to F(0) = F(L) = 0$.

(b) Si $u(0,t) = u_x(L,t) = 0 \to F(0) = F'(L) = 0$.

(c) Si $u_x(0,t) = u(L,t) = 0 \to F'(0) = F(L) = 0$.

(d) Si $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \to F'(0) = F'(L) = 0$.

Esto lleva, respectivamente, a que:

(a) $F_n(x) = \operatorname{sen}(p_n x)$ donde $p_n = \dfrac{n\pi}{L}$. La solución general viene dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(cp_n t) + B_n^* \operatorname{sen}(cp_n t)\right) \operatorname{sen}(p_n x)$$

donde los B_n y $cp_n B_n^*$ son los coeficientes de Fourier de la extensión impar de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente en el intervalo $[0, L]$ que vienen dados por la fórmula (6.11) para todo $n = 1, 2, \ldots$

(b) $F_n(x) = \operatorname{sen}(p_n x)$ donde $p_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2L}$. La solución general viene dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos(cp_n t) + B_n^* \operatorname{sen}(cp_n t)\right) \operatorname{sen}(p_n x)$$

donde los B_n y $cp_n B_n^*$ son los coeficientes b_n del apartado b) del teorema 6.3 para $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente.

(c) $F_n(x) = \cos(p_n x)$ donde $p_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2L}$. La solución general viene dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(cp_n t) + A_n^* \operatorname{sen}(cp_n t)\right) \operatorname{sen}(p_n x)$$

donde los A_n y $cp_n A_n^*$ son los coeficientes a_n del apartado a) del teorema 6.3 para $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente.

(d) $F_n(x) = \cos(p_n x)$ donde $p_n = \dfrac{n\pi}{L}$. La solución general viene dada por:

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(cp_n t) + A_n^* \operatorname{sen}(cp_n t)\right) \cos(p_n x)$$

donde A_0, A_n y $cp_n A_n^*$ son los coeficientes de Fourier de la extensión par de $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente en el intervalo $[0, L]$ que vienen dados por la fórmula (6.12) para todo $n = 1, 2, \ldots$

■ **Nota 6.14.** La notación A_n, A_n^* o B_n, B_n^* para los coeficientes se ha tomado, al igual que en el caso de la ecuacion del calor, por identificación con los coeficientes a_n y b_n de las fórmulas (6.12) y (6.11) respectivamente de las series de Fourier. También de forma análoga al caso de la ecuación del calor, en todos los casos de la proposición 6.10, al resolver la EDO $F'' - kF = 0$, las únicas soluciones no triviales aparecen para $k < 0$ salvo el caso d). En ese caso, existe una solución para $k \leq 0$ que viene dada por $F(x)$ igual a una constante. Denotamos esa constante por $A_0/2$ tal como aparece en el apartado d) de la proposición 6.10.

6.7. Ecuación de Laplace

La ecuación de Laplace apareció por primera vez en un documento de Euler sobre hidrodinámica en 1752 pero fue Laplace quien, a partir de 1782, estudió sus soluciones al investigar la atracción gravitacional de cuerpos arbitrarios en el espacio.

La ecuación bidimensional del calor viene dada por la expresión:

$$u_t = c^2 \left(u_{xx} + u_{yy}\right).$$

Si el flujo del calor es **estacionario**, es decir, que no depende del tiempo, entonces su derivada con respecto al tiempo será 0, es decir, $u_t = 0$ y obtenemos la llamada **ecuación de Laplace** bidimensional:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \qquad (6.47)$$

El análogo en tres dimensiones sería la ecuación de Laplace tridimensional:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \qquad (6.48)$$

aunque el caso tridimensional no lo trataremos en este libro. Las ecuaciones de Laplace (6.47) y (6.48) también se presentan otros aspectos de la física matemática como puede ser el potencial electrostático de cargas eléctricas. La ecuación de Laplace se conoce también como **ecuación del potencial** y, como vimos en el tema anterior, se trata de una EDP lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes de tipo elíptico.

La ecuación de Laplace en una región R junto con una condición que se cumpla sobre todos los puntos de la frontera de R conforman lo que se denomina un **problema con valor en la frontera**. Como la ecuación de Laplace

no tiene dependencia con respecto al tiempo, no habrá condiciones iniciales que deban satisfacerse. Sin embargo, si que son necesarias algunas condiciones que deben satisfacerse en la frontera de la región R. Para simplificar, consideraremos solamente regiones R que sean rectángulos y consideraremos que $u(x, y)$ toma valores preestablecidos en la frontera de la región. Los problemas con estas características reciben el nombre de **problema de Dirichlet**, que tratamos a continuación.

Problema de Dirichlet

Consideramos la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ en un rectángulo $R = [0, a] \times [0, b]$ (ver figura 6.2). Suponemos que la temperatura $u(x, y)$ cumple que es $f(x)$ en el lado superior del rectángulo para una cierta función dada y cero en el resto de lados que constituyen la frontera de R.

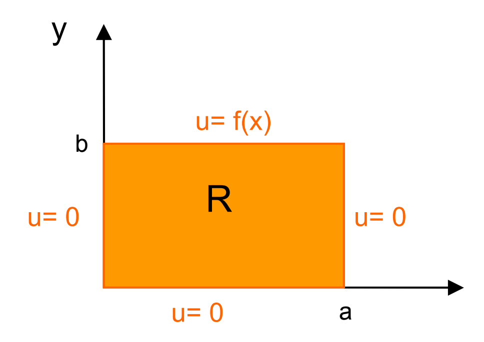


Figura 6.2: Problema de Dirichlet en el rectángulo R.

Es decir, consideramos la ecuación:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{6.49}$$

con las condiciones:

$$u(0, y) = 0 \text{ para todo } 0 \leq y \leq b \tag{6.50}$$
$$u(x, 0) = 0 \text{ para todo } 0 \leq x \leq a \tag{6.51}$$
$$u(a, y) = 0 \text{ para todo } 0 \leq y \leq b \tag{6.52}$$
$$u(x, b) = f(x) \text{ para todo } 0 \leq x \leq a \tag{6.53}$$

Para resolver este problema procedemos paso a paso de manera muy similar a las ecuaciones de ondas y del calor de las secciones anteriores:

- **Paso 1.** Aplicamos el método de separación de variables a la ecuación (6.49).
- **Paso 2.** Al resolver el problema por separación de variables, obtendremos soluciones de la EDO en la variable x que satisfacen las condiciones de frontera izquierda y derecha y se determinan las soluciones de la EDO en la variable y añadiendo la condición de frontera inferior.

- **Paso 3.** La solución del problema será una serie que resulta de la suma de las soluciones anteriores. Se usará la condición de frontera superior para el cálculo de coeficientes de series de Fourier para llegar a la solución del problema.

Paso 1. Separación de variables. Dos EDO

Aplicamos el método de separación de variables. Consideramos:

$$u(x, y) = F(x)G(y)$$

en (6.49) y obtenemos $F''G + FG'' = 0$, donde se sobreentiende que la función F ahora depende de la variable x y la función G depende de la variable y. Esto nos lleva a que:

$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k$$

donde k es una constante, que nos lleva a las dos EDO $F'' - kF = 0$ y $G'' + k\,G = 0$.

Paso 2. Aplicación de las condiciones de frontera

Si $G \equiv 0$, obtenemos que $u \equiv 0$, que es una solución trivial. En otro caso $G \neq 0$.

- **Resolución de $F(x)$:** A partir de las condiciones en la frontera izquierda y derecha, obtenemos:

  $$u(0, y) = 0 \rightarrow F(0)G(y) = 0 \rightarrow F(0) = 0$$

  y

  $$u(a, y) = 0 \rightarrow F(a)G(y) = 0 \rightarrow F(a) = 0,$$

  así que nos queda una EDO lineal $F'' + kF = 0$ con las condiciones $F(0) = 0, F(a) = 0$. De manera análoga a lo que ocurre en la ecuación de ondas y la ecuación del calor, los casos $k = 0$ y $k > 0$ dan soluciones triviales $F = 0$ y, por tanto, $u = 0$. Así que consideramos $k < 0$ y, renombrando $k = -p^2$, obtenemos que las soluciones de la F son de la forma:

  $$F(x) = A\cos(px) + B\,\mathrm{sen}(px).$$

  Sustituimos $F(0) = F(a) = 0$ y obtenemos que $A = 0$ y que los únicos valores válidos de p son $p_n = n\pi/a$ de manera análoga a como se hace en la ecuación de ondas y la ecuación del calor. Así, para $B = 1$, las soluciones para $F(x)$ son:

  $$F_n(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- **Resolución de $G(y)$:** La ecuación para G quedará $G'' - p_n^2 G = 0$ para los valores de p_n anteriores. El polinomio característico tiene raíces p_n y $-p_n$, obteniendo la solución:

$$G_n(y) = C_n\, e^{p_n y} + D_n\, e^{-p_n y},$$

para constantes arbitrarias C_n y D_n. Si $F(x) \equiv 0$, obtenemos la solución trivial $u \equiv 0$. En otro caso, aplicamos la condición de frontera en el lado inferior de R:

$$u(x,0) = 0 \to F(x)G(0) = 0 \overset{F(x)\neq 0}{\to} G(0) = 0$$

así que, en particular,

$$G_n(0) = 0 \to G_n(0) = C_n + D_n = 0 \to D_n = -C_n.$$

Así, teniendo en cuenta que la función seno hiperbólico viene dada por la expresión:

$$\operatorname{senh}(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

obtenemos:

$$G_n(y) = C_n \left(e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{\frac{-n\pi y}{a}} \right) = 2C_n \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right).$$

Si reescribimos $2C_n = C_n^*$ y, teniendo en cuenta la expresión obtenida para $F_n(x)$, llegamos a las funciones características del problema:

$$u_n(x,y) = F_n(x)\, G_n(y) = C_n^* \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right). \qquad (6.54)$$

Paso 3. Solución del problema completo

Las funciones $u_n(x,y)$ satisfacen las condiciones de frontera en los lados izquierdo, derecho e inferior. Para llegar a la solución que también satisfaga la condición en la frontera $u(x,b) = f(x)$ en el lado superior, aplicamos el Principio de superposición (ver teorema 6.2 y nota posterior). Tendremos que una solución al problema completo vendrá dada por la serie:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right).$$

A partir de esta expresión evaluada en $y = b$ y la condición $u(x,b) = f(x)$ obtenemos:

$$u(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \operatorname{sen}(p_n x).$$

El desarrollo de la extensión impar de $f(x)$ en el intervalo $[0,a]$ es:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(p_n x)$$

tal como vimos en la proposición 6.5. Identificando las series y sus coeficientes, tendremos que:

$$C_n^* \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = B_n.$$

Utilizamos la fórmula (6.11) y obtenemos:

$$B_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\ \operatorname{sen}(p_n x)\ dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6.55}$$

y, por tanto,

$$B_n = C_n^* \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\ dx.$$

Tendremos entonces que la solución del problema de Dirichlet viene dada por:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^*\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\ \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right). \tag{6.56}$$

donde:

$$C_n^* = \frac{2}{a\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\int_0^a f(x)\ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\ dx. \tag{6.57}$$

■ **Nota 6.15.** Bajo ciertas condiciones, siempre podemos asegurar que el problema de Dirichlet tiene solución. Una condición suficiente es, por ejemplo, que f, f' y f'' sean funciones contínuas en el intervalo $[0, a]$. ■

Problemas y cuestiones de la sección 6.7.

1. Resuelve el problema de Dirichlet $u_{xx} + u_{yy} = 0$ en el cuadrado $R = [0,2] \times [0,2]$ con las condiciones de frontera $u(x,2) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$ para todo $0 \leq x \leq 2$ y $u(x,y) = 0$ en el resto de lados del cuadrado.

   (Solución. $u(x,y) = \dfrac{1}{\operatorname{senh}\pi}\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}\pi x\right)\operatorname{senh}\left(\dfrac{1}{2}\pi y\right)$**).**

2. Resuelve el problema de Dirichlet en el rectángulo $R = [0,a] \times [0,b]$ con las condiciones de frontera $u(0,y) = u(a,y) = 0$, $u(x,0) = 0$ y $u(x,b) = f(x)$ si:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq a/2 \\ a - x & si \quad a/2 \leq x \leq a \end{cases}$$

   para una constante $a > 0$.

   (Solución. $u(x,y) = \dfrac{4}{\pi^2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{senh}(\frac{\pi b}{a})}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\ \operatorname{senh}\left(\dfrac{\pi y}{a}\right)\right) -$
   $\dfrac{4}{\pi^2}\left(\dfrac{1}{3^2\operatorname{senh}(\frac{3\pi b}{a})}\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi x}{a}\right)\operatorname{senh}\left(\dfrac{3\pi y}{a}\right) + \ldots\right)$**).**

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

3. **(Flujo de calor en una placa).** Las caras de una placa cuadrada delgada de lado 24 cm. están aisladas perfectamente. El lado superior del cuadrado se mantiene a una temperatura de 20^oC y los lados restantes se mantienen a 0^oC. Encuentra la temperatura de estado estacionario $u(x, y)$ de la placa.

   (Solución. $u(x,y) = \dfrac{80}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2n-1)\pi x}{24}\right)}{\operatorname{senh}((2n-1)\pi)} \operatorname{senh}\left(\dfrac{(2n-1)\pi y}{24}\right)$**).**

6.8. Anexos

6.8.1. Existencia y convergencia de la serie de Fourier

En esta sección estudiamos una condición suficiente para que la serie de Fourier de $f(x)$ en $[-L, L]$ exista. También indicamos el valor de la serie en función de $f(x)$. Recordemos que la serie de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $[-L, L]$ viene dada por:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

para los valores a_n y b_n dados por (6.8) y (6.9) respectivamente.

Teorema 6.4. Si $f(x)$ es una función definida en $[-L, L]$ y existen las derivadas por la derecha y por la izquierda en todo punto de dicho intervalo, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ es convergente. Además,

- Si $f(x)$ es contínua en x, entonces la serie de Fourier (6.1) y $f(x)$ coinciden.
- Si $f(x)$ es discontínua en x, entonces la serie de Fourier (6.1) coincide con la media entre los límites laterales de $f(x)$ en el punto x.

6.8.2. Ortogonalidad del sistema trigonométrico

Nota 6.16 (Fórmulas trigonométricas)**.** Se tiene que:

(a) $\cos(nx)\cos(mx) = \dfrac{1}{2}\cos((n+m)x) + \dfrac{1}{2}\cos((n-m)x)$

(b) $\operatorname{sen}(nx)\cos(mx) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}((n+m)x) + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}((n-m)x)$

(c) $\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx) = \dfrac{1}{2}\cos((n-m)x) - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}((n+m)x)$

y, por tanto,

(a) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx =$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((n+m)x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos((n-m)x)\,dx$$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)\,dx =$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}\left((n+m)x\right)dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}\left((n-m)x\right)dx$$

(c) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx =$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left((n-m)x\right)dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left((n+m)x\right)dx.$$

■ **Definición 6.6.** El sistema trigonométrico

$$1,\ \cos x,\ \operatorname{sen} x,\ \cos 2x,\ \operatorname{sen} 2x, \cdots,\ \cos nx,\ \operatorname{sen} nx,$$

es **ortogonal** en $[-\pi,\pi]$ (y, en consecuencia, en cualquier intervalo de longitud 2π, debido a la periodicidad). Esto significa que la integral del producto de cualesquiera de estas funciones diferentes sobre dicho intervalo es cero, es decir:

- Para enteros cualesquiera $n \neq m$ se tiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\ \cos(nx)\,dx = 0 \quad (m \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\ \operatorname{sen}(nx)\,dx = 0 \quad (m \neq n).$$

- Para enteros m y n cualesquiera (incluyendo $m = n$) se tiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\ \operatorname{sen}(nx)\,dx = 0.$$

■ **Nota 6.17.** La prueba de la ortogonalidad del sistema trigonométrico se basa en la transformación de los productos dentro de las integrales en sumas como se ve en la segunda parte de la nota 6.16.

6.8.3. Determinación de los coeficientes de Fourier

En esta sección explicamos por qué los coeficientes de las series de Fourier toman los valores a_n y b_n explicados en la primera sección. Para simplificar los cálculos, consideraremos $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, pi]$. Su serie de Fourier viene dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\right)$$

donde $a_0, a_1, a_2, \cdots$ y $b_1, b_2, \cdots$ son constantes reales que vienen dadas por las fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,$$

ISBN: 978-84-17429-33-1

DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx.$$

Estos coeficientes se determinarán a partir de $f(x)$ mediante ciertas fórmulas llamadas **fórmulas de Euler**. Consideramos una función $f(x)$ que coincida con su serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \,\mathrm{sen}(nx)\right). \tag{6.58}$$

Para determinar a_0, integramos ambos miembros de (6.58) entre $-\pi$ y π,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \,\mathrm{sen}(nx))\right]dx.$$

Por tanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \underbrace{a_0\int_{-\pi}^{\pi} dx}_{2\pi a_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx}_{0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(nx)\,dx}_{0}\right).$$

de donde deducimos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\pi\, a_0 \quad \text{y, despejando,} \quad a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Determinamos ahora los coeficientes a_n para $n \geq 1$. Se multiplica (6.58) por $\cos(mx)$, donde m es cualquier entero positivo fijo, y se integra de $-\pi$ a π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \,\mathrm{sen}(nx))\right]\cos(mx)\,dx. \tag{6.59}$$

Al integrar, en el segundo miembro obtenemos:

$$\underbrace{a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)\,dx}_{0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sen}(nx)\cos(mx)\,dx\right]. \tag{6.60}$$

Aplicando las fórmulas de la nota 6.16, obtenemos que aparecerán cuatro términos en cada sumando del segundo miembro. Serán todos cero excepto la integral $\int_{-\pi}^{\pi}\cos((n-m)x)\,dx$ que será igual a π cuando $n = m$, luego la expresión (6.59) quedará:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = a_n\,\pi$$

y, despejando a_m, obtenemos:

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx \quad m = 1, 2, \cdots$$

Ahora determinamos $b_1, b_2, \ldots$ Multiplicando (6.58) por $\operatorname{sen}(mx)$, donde m es cualquier entero positivo fijo, e integrando entre $-\pi$ y π tenemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) \right] \operatorname{sen}(mx)\, dx. \tag{6.61}$$

Al integrar, el segundo miembro queda:

$$a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \operatorname{sen}(mx)\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx)\, dx \right].$$

Aplicando las fórmulas de la nota 6.16, obtenemos que aparecerán cuatro términos en cada sumando del segundo miembro. Serán todos cero excepto la integral $\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x)\, dx$ que será igual a π cuando $n = m$. Simplificando, obtenemos:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx)\, dx, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Finalmente, escribimos n en lugar de m y obtenemos las **fórmulas de Euler**:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx. \end{aligned} \tag{6.62}$$

Tablas

En las siguientes páginas se pueden encontrar una tabla de primitivas, una tabla con la transformada de Laplace de diversas funciones, una tabla con las propiedades más importantes de la transformada de Laplace y una tabla con relaciones trigonométricas.

TABLA DE PRIMITIVAS

Integrales inmediatas	Integrales de funciones compuestas
$\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \qquad n \neq -1$	$\int u' \, u^n \, dx = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$
$\int \dfrac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \dfrac{u'}{u} \, dx = \ln \lvert u \rvert + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int u' \, e^u \, dx = e^u + C$
$\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	$\int u' \, a^u \, dx = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$
$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$	$\int u' \, \operatorname{sen} u \, dx = -\cos u + C$
$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int u' \, \cos u \, dx = \operatorname{sen} u + C$
$\int \tan x \, dx = -\ln \lvert \cos x \rvert + C$	$\int u' \, \tan u \, dx = -\ln \lvert \cos u \rvert + C$
$\int \cot x \, dx = \ln \lvert \operatorname{sen} x \rvert + C$	$\int u' \, \cot u \, dx = \ln \lvert \operatorname{sen} u \rvert + C$
$\int \sec x \, dx = \ln \lvert \sec x + \tan x \rvert + C$	$\int u' \, \sec u \, dx = \ln \lvert \sec u + \tan u \rvert + C$
$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln \lvert \operatorname{cosec} x - \cot x \rvert + C$	$\int u' \, \operatorname{cosec} u \, dx = \ln \lvert \operatorname{cosec} u - \cot u \rvert + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$	$\int \dfrac{u'}{\cos^2 u} \, dx = \tan u + C$
$\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \, dx = -\cot x + C$	$\int \dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} \, dx = -\cot u + C$

$\int \operatorname{arc\,sen} x\, dx = \sqrt{1-x^2} + x \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int u' \operatorname{arc\,sen} u\, dx = \sqrt{1-u^2} + x \operatorname{arc\,sen} u + C$
$\int \arccos x\, dx = -\sqrt{1-x^2} + x \arccos x + C$	$\int u' \arccos u\, dx = -\sqrt{1-u^2} + x \arccos u + C$
$\int \arctan x\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$	$\int u' \arctan u\, dx = u \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\, dx = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
$\int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x + C$	$\int u' \operatorname{senh} u\, dx = \cosh u + C$
$\int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x + C$	$\int u' \cosh u\, dx = \operatorname{senh} u + C$
$\int \tanh x\, dx = \ln\lvert\cosh x\rvert + C$	$\int u' \tanh u\, dx = \ln\lvert\cosh u\rvert + C$
$\int \coth x\, dx = \ln\lvert\operatorname{senh} x\rvert + C$	$\int u' \coth u\, dx = \ln\lvert\operatorname{senh} u\rvert + C$
$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\, dx = \tanh x + C$	$\int \frac{u'}{\cosh^2 u}\, dx = \tanh u + C$
$\int \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x}\, dx = -\coth x + C$	$\int \frac{u'}{\operatorname{senh}^2 u}\, dx = -\coth u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = \arg\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2-a^2}}\, dx = \arg\cosh\left(\frac{u}{a}\right) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = \arg\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+a^2}}\, dx = \arg\operatorname{senh}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

Cristina Chiralt Monleón y Alejandro Miralles Montolío
ISBN: 978-84-17429-33-1

Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)}$	$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)}$
1	$\dfrac{1}{s}\ ,\ s>0$	$\text{sen}(bt)-bt\ \cos(bt)$	$\dfrac{2b^3}{(s^2+b^2)^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}\ ,\ s>a$	$t\,\text{sen}(bt)$	$\dfrac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
$t^n\ ,\ n=1,2,\cdots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\ ,\ s>0$	$\text{sen}(bt)+bt\cos(bt)$	$\dfrac{2bs^2}{(s^2+b^2)^2}$
$e^{at}t^n\ ,\ n=1,2,\cdots$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}\ ,\ s>a$	$t\cos(bt)$	$\dfrac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
$e^{at}-e^{bt}$	$\dfrac{a-b}{(s-a)(s-b)}\ ,\ s>max\{a,b\}$	$\text{sen}(bt)\ \cosh(bt)-\cos(bt)\,\text{senh}(bt)$	$\dfrac{4b^3}{s^4+4b^4}$
$ae^{at}-be^{bt}$	$\dfrac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}\ ,\ s>max\{a,b\}$	$\text{sen}(bt)\,\text{senh})bt)$	$\dfrac{2b^2s}{s^4+4b^4}$
$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\ ,\ s>0$	$\text{senh}(bt)-\text{sen}(bt)$	$\dfrac{2b^3}{s^4-b^4}$
$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}\ ,\ s>0$	$\cosh(bt)-\cos(bt)$	$\dfrac{2b^2\,s}{s^4-b^4}$
$\text{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{s^2+b^2}\ ,\ s>0$	Función escalón: $u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}\ ,\ s>0$
$\cos(bt)$	$\dfrac{s}{s^2+b^2}\ ,\ s>0$	Función delta de Dirac: $\delta(t-a)$	$e^{-as}\ ,\ s>0$
$e^{at}\,\text{sen}(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}\ ,\ s>a$		
$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\ ,\ s>a$		
$\text{senh}(bt)$	$\dfrac{b}{s^2-b^2}\ ,\ s>b$		
$\cosh(bt)$	$\dfrac{s}{s^2-b^2}\ ,\ s>b$		

ISBN: 978-84-17429-33-1

Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica,
ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

(1) **Linealidad.** Si a y b son constantes, entonces:

$$L\left[a\, f(t) + b\, g(t)\right] = a\, L\left[f(t)\right] + b\, L\left[g(t)\right]$$

para todo s tal que las transformadas de Laplace de las funciones f y g existan a la vez.

(2) **Propiedad de la traslación.** Si la transformada de Laplace $L[f] = F(s)$ existe para $s > \alpha$, entonces:

$$L\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a) \quad \text{para} \quad s > \alpha + a.$$

(3) **Transformada de Laplace de la derivada.** Si $f(t)$ y sus derivadas son contínuas en $[0, +\infty[$ y son todas de orden exponencial α, entonces, para $s > \alpha$ se tiene:

$$L\left[f'\right] = s\, L[f] - f(0).$$

$$L\left[f''\right] = s^2 L[f] - s f(0) - f'(0).$$

(4) **Transformada de Laplace de derivadas de orden mayor.** Si $f(t)$ y sus derivadas son contínuas en $[0, +\infty[$ y son todas de orden exponencial α, entonces, para $s > \alpha$ se tiene:

$$L\left[f^{(n)}\right] = s^n\, L[f] - s^{n-1}\, f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

(5) **Derivada de la transformada de Laplace.** Sea $L[f] = F(s)$ y supongamos que f es continua a trozos en $[0, +\infty[$ y de orden exponencial α. Entonces, para $s > \alpha$ se tiene:

$$L\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

siendo $F(s) = L\left[f(t)\right]$.

(6) **Transformada de la integral.** Si $L\left[f(t)\right] = F(s)$, entonces:

$$L\left[\int_0^t f(u)\, du\right] = \frac{F(s)}{s},$$

o en forma equivalente,

$$L^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(u)\, du.$$

(7) **Propiedad de desplazamiento.** Si $F(s) = L\left[f(t)\right]$ existe para $s > \alpha$, entonces:

$$L\left[u(t-a)\ f(t-a)\right] = e^{-as}\, F(s)$$

existe para $s > a + \alpha$ y se tiene:

$$L^{-1}\left[e^{-as} F(s)\right] = u(t-a)\ f(t-a),$$

siendo $u(t-a)$ la función escalón (o de Heaviside).

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen}(m+n) = \operatorname{sen} m \ \cos n + \cos m \ \operatorname{sen} n.$$

$$\operatorname{sen}(m-n) = \operatorname{sen} m \ \cos n - \cos m \ \operatorname{sen} n.$$

$$\cos(m+n) = \cos m \ \cos n - \operatorname{sen} m \ \operatorname{sen} n.$$

$$\cos(m-n) = \cos m \ \cos n + \operatorname{sen} m \ \operatorname{sen} n.$$

$$\operatorname{sen}(2m) = 2 \operatorname{sen} m \ \cos m.$$

$$\cos(2m) = \cos^2 m - \operatorname{sen}^2 m = 1 - 2\operatorname{sen}^2 m = 2\cos^2 m - 1.$$

$$\operatorname{sen} m \cos n = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(m+n) + \operatorname{sen}(m-n)\right].$$

$$\cos m \cos n = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n) + \cos(m-n)\right].$$

$$\operatorname{sen} m \operatorname{sen} n = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n) - \cos(m+n)\right].$$

Cristina Chiralt Monleón y Alejandro Miralles Montolío
ISBN: 978-84-17429-33-1

Cálculo II. Grados en ingeniería eléctrica, ingeniería mecánica, ingeniería química e ingeniería en tecnologías industriales
DOI: http://dx.doi.org/10.6035/Sapientia152

Bibliografía

[1] BORELLI, ROBERT L. Y COURTNEY S. COLEMAN. 2002. *Ecuaciones diferenciales*. México: Oxford University Press.

[2] BOYCE, WILLIAM E. Y RICHARD C. DIPRIMA. 2010. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Editorial Limusa.

[3] BRAUN, MARTIN. 1990. *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

[4] CAMPOS, BEATRIZ Y CRISTINA CHIRALT. 2011. *Ecuaciones diferenciales*. Castelló de la Plana: Col·lecció Sapientia 49 (Universitat Jaume I). http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/24281/S49.pdf

[5] EDWARDS, C. HENRY Y DAVID E. PENNEY. 2005. *Ecuaciones diferenciales*. México: Prentice Hall.

[6] RICARDO, HENRY. 2008. *Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna*. Barcelona: Editorial Reverté.

[7] KISELIOV, ALEKSANDR I., MICHAIL L. KRASNOV Y GRIGORIJ I. MAKARENKO. 1993. *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Madrid: Editorial Mir.

[8] LÓPEZ, MANUEL. 2006. *Problemas Resueltos de Ecuaciones diferenciales*. España: Editorial Paraninfo.

[9] NAGLE, R. KENT Y EDWARD B. SAFF. 2005. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Prentice Hall.

[10] PUIG ADAM, PEDRO. 1976. *Curso teórico-práctico de ecuaciones diferenciales aplicado a la física y técnica*. Madrid: Biblioteca Matemática.

[11] SIMMONS, GEORGE F. 1990. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. Madrid: Editorial McGraw-Hill.

[12] TENENBAUM, MORRIS Y HARRY POLLARD. 1963. *Ordinary differential equations*. New York: Dover Publications, Inc.

[13] D. G. ZILL. 2009. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Mexico: Editorial Paraninfo.

[14] Zill, Dennis G. y Michael Cullen. 2012. *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. España: Editorial McGraw-Hill.

[15] Bellido, J. Carlos, Alberto Donoso y Sebastián Lajara. 2014. *Ecuaciones en derivadas parciales*. España: Editorial Paraninfo.

[16] Stephenson, Geoffrey. 2014. *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*. Barcelona: Editorial Reverté S.A.